Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle

Brigitte Grugeon-Allys
Université Paris Est Créteil, Laboratoire de Didactique André Revuz
brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé

Cet article présente les fondements théorique et méthodologique en didactique des mathématiques pour concevoir une évaluation diagnostique automatisée au service des apprentissages des élèves. Le diagnostic concerne l'algèbre élémentaire pour des élèves de l'enseignement secondaire des grades 6 à 9 (12 à 16 ans) en France. Nous prenons en compte le cadre de la théorie anthropologique du didactique – TAD - (Chevallard, 1999). Une étude épistémologique et didactique vise à définir un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves en algèbre élémentaire qui fonde la méthodologie de conception d'une évaluation diagnostique. Nous caractérisons ainsi les tâches du test, le codage qualitatif des réponses, le profil de l'élève et des pistes pour la régulation de l'enseignement. Nous l'illustrons à travers l'évaluation *Pépite* et explicitons des résultats d'étude de cas avant de discuter ces résultats et de proposer des perspectives de recherche.

Mots-clés

Didactique, diagnostic, algèbre élémentaire, modèle épistémologique, usages, enseignement différencié.

Abstract

This contribution focuses on the presentation of the theoretical and methodological foundations of automated diagnostic assessment *Pépite* for student learning, in mathematics education. This diagnosis the elementary algebra to students of secondary education of grade 6 to 9 (12-16 years) in France. We take into account the context of the anthropological theory of didactics (Chevallard, 1999). An Epistemological and didactic study aims to define a multidimensional analysis of students' knowledge in elementary algebra that founds the design methodology of a diagnostic assessment. We thus characterize the test tasks covering aspects of algebraic activities by grade level, qualitatively code responses to identify operational consistencies student and organize the regulation of education. We illustrate through the assessment [program name], explain case study results before discussing these results and propose research perspectives.

Keywords

Didactic, diagnostic assessment, elementary algebra, epistemological model, usages, teaching suggestions.

Pour citer cet article : Grugeon-Allys, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, *2*(2), pp. 63-88.

1. Introduction et contexte

Les questions portant sur l'obtention d'un diagnostic de qualité à visée formative, ayant pour objectif d'adapter l'enseignement aux besoins d'apprentissage repérés des élèves, constituent pour nous un enjeu de recherche majeur sur l'enseignement et l'apprentissage. Depuis les années 1990, nous avons développé des projets pluridisciplinaires *Pépite – PepiMep* (Delozanne & al., 2010 ; Pilet, Chenevotot, Grugeon, El-Kechaï & Delozanne, 2013). Leurs principaux objectifs sont d'outiller les enseignants pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et réguler leur enseignement dans le domaine de l'algèbre élémentaire, dans l'enseignement secondaire en France, chez les élèves des grades 6 à 9 (12 à 16 ans). Nous avons conçu des ressources numériques, l'évaluation diagnostique automatique *Pépite* (Grugeon-Allys et al., 2012), des Parcours d'Enseignement Différencié (PED) (Pilet, 2012) et poursuivons l'analyse de leurs usages dans des classes « ordinaires » sur le long terme. Ces recherches sont menées par des chercheurs issus de différents champs de recherche - didactique des mathématiques, informatique, ergonomie cognitive, sciences de l'éducation - en lien avec des enseignants et des formateurs. Depuis 2011, nous avons disséminé les ressources issues de nos recherches sur la plateforme en ligne *LaboMep*[1], ressources qui sont utilisées par des enseignants du secondaire. Ces travaux se poursuivent en ce moment dans le cadre du projet de recherche *NéoPraéval*[2] que je coordonne et du *LéA*[3] Roger Martin du Gard PECANUMELI.

Depuis 2014, l'implication dans le projet *NéoPraéval* nous a amenée à expliciter les choix théorique et méthodologique retenus pour concevoir l'évaluation diagnostique *Pépite*. Contrairement à de nombreuses évaluations diagnostiques sommatives, nous ne cherchons pas seulement à repérer les connaissances acquises des élèves à partir de l'étude de l'adéquation des réponses au regard de ce qui est attendu. Nous visons à identifier le développement et l'appropriation des connaissances des élèves en algèbre élémentaire, à un niveau scolaire donné (grades 6 à 9), à partir de l'analyse des procédures mises en œuvre lors de la résolution de tâches, au regard du savoir visé. L'enjeu est de contribuer à l'organisation de la régulation de l'enseignement selon les besoins d'apprentissage repérés des élèves (Mottier-Lopez, 2015).

En quoi la définition d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves en algèbre élémentaire contribue-t-il à la conception d'une telle évaluation diagnostique ? Quelle méthodologie mettre en œuvre pour concevoir une évaluation diagnostique au service des apprentissages des élèves ? En quoi les résultats de l'évaluation diagnostique permettent-ils à l'enseignant de repérer des besoins d'apprentissage des élèves et d'engager un travail de régulation de son enseignement ?

Nous présentons d'abord dans le paragraphe 2 les fondements théoriques du modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves en algèbre élémentaire. Pour ceci, nous situons nos travaux par rapport à des approches institutionnelle et cognitive et

---

[1] *LaboMep* : plateforme en ligne de l'association des professeurs de mathématiques Sésamath : http://www.labomep.net/

[2] NéoPraéval : *Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'évaluation et d'enseignement des mathématiques* dans le cadre de l'Agence Nationale pour la Recherche, convention ANR-13-APPR-002-01. http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

[3] *Léa* : Les LéA, Lieux d'éducation associés, ont été définis dans le programme scientifique de l'IFÉ. http://ife.ens-lyon.fr/lea ; http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/college-martin-du-gard

caractérisons un cadre épistémologique de référence relatif à l'algèbre élémentaire. Nous le décrivons dans le cadre de la TAD. Nous spécifions ensuite, dans le paragraphe 3, la méthodologie développée en didactique et en informatique pour définir une évaluation diagnostique en algèbre élémentaire. Nous l'illustrons dans le paragraphe 4 à partir des résultats d'expérimentations menées pour le grade 8. Pour conclure, nous discutons ces résultats et nous proposons des perspectives de recherche sur la conception et l'exploitation de telles évaluations.

2. Les fondements théorique et méthodologique

Afin de déterminer des conditions didactiques pour concevoir une évaluation diagnostique à visée formative, nous proposons une approche multidimensionnelle dans le champ de la didactique des mathématiques. Nous précisons les raisons d'une telle démarche scientifique.

Après avoir construit des connaissances du domaine numérique à l'école primaire qui peuvent déjà être très hétérogènes (Dalibard et Pastor, 2015), les élèves découvrent de nouvelles connaissances relatives à l'algèbre élémentaire au collège, à partir du grade 6. Les élèves développent et s'approprient de nouveaux concepts (expressions algébriques, équations, expressions fonctionnelles) pendant trois années au collège, en interaction avec des enseignants ayant des pratiques différentes qui peuvent être en décalage avec les attentes institutionnelles (Coulange et Grugeon, 2008). Nous faisons l'hypothèse qu'au-delà des difficultés de conceptualisation, l'hétérogénéité des connaissances des élèves en algèbre élémentaire peut être renforcée par des implicites (Assude et al., 2012), des besoins d'apprentissage ignorés des programmes (Castela, 2008) et / ou des décalages entre les programmes de différents niveaux scolaires, mais aussi par des différences entre les pratiques, discours et modes de justification développés par les enseignants avec qui ils apprennent. Aussi, distinguons-nous plusieurs entrées théoriques pour définir un modèle d'analyse des connaissances des élèves, qui fonde la méthodologie de conception de l'évaluation diagnostique *Pépite*. Nous les présentons et développerons chacun des points dans les paragraphes suivants.

- Nous retenons le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999) car nous avons besoin d'un cadrage macroscopique pour définir un modèle d'analyse des connaissances construites par les élèves en algèbre élémentaire au cours de plusieurs années d'enseignement dans l'institution collège. Nous cherchons à mettre en relation les techniques, propriétés et discours justificatifs mis en œuvre par les élèves lors de la résolution de tâches diagnostiques avec les savoirs à enseigner des programmes, les techniques et discours justificatifs développés par les enseignants pour la résolution de tâches analogues. Pour ceci, à partir d'une étude épistémologique, nous définissons un cadre épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire (Grugeon, 1997 ; Bosch & Gascon, 2005).
- Nous caractérisons aussi l'évaluation diagnostique à travers le filtre de l'algèbre élémentaire. Nous prenons en compte, à un niveau plus local, les savoirs qui se sont progressivement construits en didactique de l'algèbre dans différentes approches (Chevallard, 1985, 1989 ; Gascon, 1995 ; Vergnaud & al., 1987 ; Drouhard, 1992 ; Kieran, 1992, 2007 ; Assude & al., 2012) comme base du cadre épistémologique de référence.

- Nous croisons enfin l'approche anthropologique avec une approche cognitive pour caractériser notre modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves en algèbre élémentaire. Nous cherchons à avoir un panorama des propriétés et discours justificatifs privilégiés par les élèves lors de l'évaluation. Cette modélisation permet de mettre en relation : une description synthétique des cohérences de fonctionnement des élèves sur le domaine algébrique, une interprétation des erreurs et règles d'action erronées en relation avec les propriétés et discours justificatifs mis en jeu de façon dominante par les élèves, les besoins d'apprentissage des élèves pour réguler l'enseignement. Ce type de description permet aussi une remontée du niveau microscopique d'analyse des productions pour chaque tâche à un niveau plus synthétique de description sur l'ensemble des tâches de l'évaluation diagnostique.

Nous présentons maintenant les fondements retenus.

2.1 Évaluer des praxéologies développées par l'élève

Nous évaluons le développement et l'appropriation des connaissances algébriques des élèves à partir de l'évaluation des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire qui sont le résultat d'assujettissements liés à l'activité algébrique mise en place dans les différentes institutions dans lesquelles les élèves ont appris, c'est-à-dire aux rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire. Nous ne nous restreignons pas à étudier si les rapports personnels des élèves sont idoines au rapport institutionnel attendu à un niveau scolaire donné, c'est-à-dire s'ils mettent en jeu les techniques attendues, les propriétés et discours justificatifs visés. Nous cherchons à dégager à travers les techniques correctes ou incorrectes mobilisées par les élèves, le bloc technologico-théorique que les élèves mobilisent de façon prégnante. Nous reprenons, ici, la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologie mathématique, c'est-à-dire, de types de tâches et de techniques les résolvant (savoir-faire), une technique étant justifiée par un discours technologique, lui-même étant justifié par une théorie (savoir ou bloc technologico-théorique) (Chevallard, 1999). Les rapports institutionnels à un savoir donné déterminent l'activité mathématique idoine dans une institution et les rapports personnels visés. Nous cherchons donc à étudier les praxéologies relatives à l'algèbre élémentaire mises en œuvre par les élèves suivant les tâches diagnostiques pour les mettre en relation aux praxéologies à enseigner (programmes et documents d'accompagnement, manuels) et enseignées. Nous pouvons ainsi dégager celles qui pourraient être un obstacle à l'apprentissage et déterminer les besoins d'apprentissage des élèves évalués. Pour ceci, nous avons besoin de spécifier un cadre épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire « indépendant des institutions concernées, tout en se situant dans leur champ d'action (...) qui permette cette double analyse, à la fois du côté élève et du côté institutionnel » (Grugeon, 1997).

2.2 Une synthèse des travaux de didactique de l'algèbre : vers un cadre épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire pour la fin de l'enseignement obligatoire

2.2.1 Des caractéristiques épistémologiques de l'algèbre élémentaire

Pour définir un cadre épistémologique de référence permettant d'avoir une vision globale de l'activité algébrique, nous avons fait une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre autour des dimensions[4] *outil* et *objet* (Douady, 1986) de l'algèbre élémentaire et de la rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre (Grugeon, 1997). Nous avons retenu des aspects épistémologiques caractéristiques de l'algèbre élémentaire.

Du côté de la dimension *outil*, nous caractérisons les problèmes du domaine algébrique en reprenant le point de vue de Chevallard (1985, 1989) et Gascon (1995). A partir d'une approche anthropologique, Chevallard puis Gascon caractérisent l'activité algébrique à partir du rôle central de la modélisation algébrique pour symboliser des relations entre données et indéterminées d'un problème et de la variété des problèmes algébriques dans des domaines intra-mathématiques (systèmes de nombres, géométrie) ou extra-mathématiques, beaucoup plus vaste que ceux de l'arithmétique. L'activité de symbolisation et l'usage réglé de systèmes de signes à travers une pluralité coordonnée de registres sémiotiques sont deux éléments essentiels qui amènent à distinguer l'algèbre de l'arithmétique. Gascon oppose ainsi l'algèbre élémentaire et l'« arithmétique généralisée » à travers l'opposition entre les pratiques algébriques et arithmétiques : opposition entre résolution algébrique formelle et résolution arithmétique d'un problème[5], opposition entre la mémorisation d'un calcul par une relation entre données et indéterminées et la recherche d'un nombre comme résultat d'un calcul, opposition entre nombres « concrets » et différents statuts des lettres. Gascon (1995) définit alors un nouveau modèle épistémologique de référence (MER) pour l'algèbre. Le champ de problèmes du domaine algébrique est constitué de problèmes arithmétiques, de problèmes de modélisation conduisant à la production de relations entre données et variables et de problèmes de mise en équation dans des domaines intra ou extra-mathématiques, de problèmes de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, de problèmes dans les cadres algébrique ou fonctionnel (Grugeon, 1997).

Du côté de la dimension *objet*, nous considérons l'algèbre élémentaire comme un ensemble d'objets comme ceux d'expression algébrique, de formule (variable), d'équation (inconnue), de d'identité (indéterminée) auxquels sont associés plusieurs types de représentations sémiotiques : écritures algébriques, représentations langagières, en particulier les programme de calcul, la représentation en arbre, ... (Duval, 1996). Dans une approche cognitive, de nombreux travaux cités par Kieran (1992, 2007) mettent en évidence plusieurs obstacles à l'apprentissage de l'algèbre. Au-delà des statuts de la lettre en algèbre liés au contexte de résolution comme ceux de variable, d'inconnue, d'indéterminée, les élèves peuvent ignorer les lettres ou les considérer comme une lettre-objet (étiquette)[6]. Plusieurs ruptures d'ordre épistémologique sont pointées :

[4] Ces deux dimensions ne sont pas hiérarchisées

[5] Résolution successive d'une chaine de problèmes dont le résultat est calculable et interprétable en lien avec l'énoncé.

[6] Travaux cités par Kieran : Kuc̈kmann (1981), Clement (1982), Booth (1984)

- le statut d'équivalence du signe d'égalité en opposition avec le statut d'annonce de résultat,
- le dilemme processus / objet ou l'acceptation du manque de fermeture[7] pour les expressions algébriques qui conservent la mémoire du calcul, contrairement aux expressions numériques qui peuvent être évaluées par un nombre,
- la coupure didactique (Filloy et Rojano, 1989) pour la résolution des équations selon le type des équations. Les équations du type $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ peuvent être résolues *via* des démarches arithmétiques alors que les équations du type $ax + b = cx + d$[8] nécessitent une démarche algébrique reposant sur la conservation de l'égalité. En prenant en compte la dimension *outil*, Vergnaud (1988) parle d'une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Sfard (1991), dans son modèle de développement conceptuel, distingue deux caractères des objets mathématiques, les caractères procédural et structural. C'est la prise en compte du caractère structural des expressions qui permet de développer le rôle joué par les propriétés des opérations lors de leur réécriture, le caractère procédural intervenant davantage dans la vérification numérique.

En ce qui concerne le traitement formel des expressions, Drouhard (1992) précise le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en prenant en compte la dimension technique du calcul. L'aspect sémantique d'une expression algébrique réside en particulier dans sa dénotation et son sens. Frege (1971) établit une distinction entre dénotation (Bedeutung) et sens (Sinn). Plusieurs expressions $x^2 + 2x + 1$ et $(x + 1)^2$ ont la même dénotation, c'est-à-dire la même valeur, et ont plusieurs sens qui permettent des points de vue différents sur l'expression. Par exemple, c'est l'expression $(x + 1)^2$ qui permet une stratégie pertinente pour résoudre l'équation x^2-$2x$+1 = (2x-2)(x+3) par transformation en une équation produit (x+1)(-x–5) = 0[9]. La dénotation est le fondement de l'équivalence des expressions et est au cœur du contrôle théorique des transformations par l'application des propriétés. Un autre aspect du contrôle théorique des transformations concerne la dialectique numérique / algébrique (Chevallard, 1985), en particulier, à travers la substitution d'une lettre par un nombre dans des expressions ou une équation.

Pour conclure, Kieran (2007) définit le modèle GTG de conceptualisation de l'activité algébrique et distingue trois aspects de l'activité algébrique : l'activité générative, l'activité transformationnelle et l'activité globale. L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre et prend en compte l'articulation entre différents registres de représentation sémiotique. L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation[10], le contrôle de l'équivalence à partir des propriétés comme la distributivité étant alors au cœur de cette facette de l'activité algébrique. L'activité globale concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes, des problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation, de preuve. Nous retrouvons un modèle proche de celui de la compétence algébrique défini par Grugeon (1997).

---

[7]Travaux cités par Kieran : dilemme process/product (Davis, 1975), acceptance of lack of closure (Collis, 1974)
[8] Sous certaines conditions des valeurs *a*, *b*, *c*, *d* pour que la solution ne soit pas facile à trouver par test numérique.
[9] $x^2-2x+1 = (2x-2)(x+3)$; $(x+1)^2 - 2(x-1)(x+3) = 0$; $(x+1)(x+1 -2(x+3)) = 0$ soit $(x+1)(-x-5) = 0$
[10] Par exemple, des règles relatives à la factorisation, au développement d'expressions, à la résolution d'équations et d'inéquations.

2.2.2 *Cadre épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire*

En bilan, nous prenons en compte le modèle épistémologique de référence (MER) de l'algèbre (Gascon, 1995). Le champ de problèmes du domaine algébrique recouvre des problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation, de preuve dans des contextes intra ou extra-mathématiques. L'algèbre met en jeu un ensemble d'objets permettant de résoudre ces problèmes, comme ceux d'expression algébrique (nombre généralisé), de formule (variable), d'équation (inconnue), d'identité (indéterminée) auxquels sont associés plusieurs types de représentations dans les registres de représentation sémiotique associés au domaine. La pratique d'un calcul raisonné et contrôlé et d'une flexibilité dans l'interprétation des objets s'appuie sur la prise en compte du signe d'égalité comme relation d'équivalence, des caractères procédural et structural des objets algébriques, de leur double aspect syntaxique et sémantique, de la dialectique numérique / algébrique, pour permettre un contrôle théorique s'appuyant sur des propriétés des objets et des opérateurs (distributivité simple ou double de la multiplication / addition, ..).

2.2.3 *Une praxéologie épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire*

Dans le cadre de la transposition didactique, Bosch et Gascon (2005) proposent de définir une praxéologie épistémologique de référence relative à un domaine mathématique comme unité d'analyse pour mettre en relation praxéologies à enseigner, enseignées et mises en œuvre par les élèves. En ce qui concerne notre étude, en appui sur le cadre épistémologique de référence défini plus haut, nous définissons une praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre élémentaire, à partir des types de tâches mathématiques du domaine algébrique, relatifs aux expressions algébriques, aux formules, aux équations, le bloc technologico-théorique recouvrant les aspects épistémologiques caractérisant l'algèbre élémentaire. Nous distinguons les praxéologies comme suit :

- les praxéologies de modélisation ou de preuve : types de tâches pour résoudre les problèmes du domaine algébrique (*généraliser*, *modéliser, mettre en équation, prouver*),
- les praxéologies de calcul *:* types de tâches de *calcul* relatives aux expressions algébriques, aux formules (*calculer*, *substituer*, *reconnaitre, développer*, *factoriser*) ou aux équations (*tester*, *résoudre une équation*)
- les praxéologies de traduction ou d'interprétation : types de tâches *traduire* une relation entre données et indéterminées d'un registre de représentation sémiotique à un autre, *associer* plusieurs représentations entre registres sémiotiques différents d'un même objet algébrique.

2.3 Les implicites et les besoins d'apprentissage ignorés

La prise en compte de la praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre élémentaire définie ci-dessus permet d'interroger les praxéologies à enseigner ou enseignées au collège et au lycée. Chevallard (1989) montre ainsi une péjoration culturelle de l'algèbre dans l'enseignement au collège, par la disparition du domaine « algèbre » depuis les programmes de 1971. Il met en évidence l'affaissement du travail algébrique autour de la question de l'équivalence des programmes de calcul tant pour l'invalider *via* la substitution (contre-exemple) que pour la prouver (Chevallard & Bosch, 2012). Assude & al. (2012) précisent ce qu'ils entendent par algèbre enseignée évanescente au collège, en particulier au grade 6, par l'étude des programmes et des manuels, à travers la faible place attribuée à l'introduction des raisons d'être des expressions algébriques dans des situations de généralisation, du faible travail technologique sur l'identité et l'équivalence des programmes de calcul, la faible prépondérance technologique accordée à la propriété de distributivité pour justifier et valider les calculs. Ce sont des aspects épistémologiques pointés dans le courant Early Algebra (Carraher et Schliemann, 2007 ; Radford, 2014) pour organiser la transition entre l'arithmétique et l'algèbre dans une perspective de continuité ou de synergie et qui sont très peu abordés à l'école primaire et en début de collège en France. Leur absence du bloc technologico-théorique des praxéologies à enseigner ou enseignées peut constituer autant de besoins d'apprentissage ignorés pour les élèves (Castela, 2008) et expliquer des praxéologies non idoines des élèves.

2.4 Modèle d'analyse multidimensionnelle des praxéologies mises en œuvre par les élèves

Pour modéliser le développement et l'appropriation des connaissances d'élèves spécifiques d'une classe et pas seulement d'élèves génériques, nous croisons des approches institutionnelle et cognitive. Nous partageons le point de vue développé par Vergnaud (1986) : « *comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, (nécessite) d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Étudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens* » (Vergnaud 1986, p 28). Vergnaud introduit une hypothèse forte, la dialectique entre la genèse de la connaissance d'un élève et la structure du savoir mathématique.

La méthodologie de conception d'évaluation diagnostique développée repose en partie sur ces hypothèses. Pour caractériser les connaissances des élèves en algèbre élémentaire, nous étudions les praxéologies mises en œuvre par les élèves suivant un ensemble représentatif des différents types de tâches du domaine mathématique étudié pour dégager, à partir des techniques utilisées, les éléments technologico-théoriques mobilisés de façon dominante par les élèves, par rapport à ceux attendus. L'utilisation d'une technique erronée peut être liée à des conceptions erronées mais aussi à la mobilisation d'une technologie incomplète qui ne permet pas de contrôler si le domaine d'emploi d'une propriété est valide. Les erreurs des élèves ou les techniques inadaptées sont considérées ici, à l'intérieur du processus de transposition didactique, et elles sont mises en relation avec les besoins d'apprentissage des élèves à prendre en compte dans l'enseignement, au niveau technologique. Par exemple, nous faisons l'hypothèse que, lors de la réduction d'expressions algébriques, l'utilisation de la règle d'action erronée $3+x \rightarrow 3x$, est un indicateur du dilemme processus / objet et de besoins d'apprentissage des élèves concernant la transformation des expressions algébriques en appui sur leur équivalence.

Nous définissons ainsi un modèle d'analyse multidimensionnelle des praxéologies mises en œuvre par les élèves. Nous illustrons notre démarche à partir de la résolution d'une tâche de généralisation et de preuve.

2.4.1 *Caractérisation d'une analyse multidimensionnelle des praxéologies mises en œuvre par des élèves*

Etudions la tâche d'énoncé suivant : *Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre. Tu trouves 7. ». Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.*

Voici quatre réponses nommées r1, r2, r3, r4 :

r1 : pour le nombre 1, $(1+8)3 = 27-4 = 23+1= 24/4 = 6+ 2 = 8-1= 7$

r2 : pour le nombre 1, $1+8 = 9$; $9\times3 = 27$; $27-4 = 23$; $23+1 = 24$; $24/4 = 6$; $6+2 = 8$; $8-1 = 7$.

r3 : $(x+8)3 = 3x+24 = 27x$; $27x-4 = 23x$; $23x+x = 24x$; $24x/4 = 6x$; $6x+2=8x$; $8x-x=7$.

r4 : $((x+8)3-4+x)/4+2-x =$; $(3x+24-4+x)/4+2-x =$; $(4x+20)/4+2-x =$; $x+5+2-x = 7$.

Une analyse et un codage habituel consistent à indiquer si la réponse est correcte, incorrecte ou partiellement correcte, comme dans les évaluations internationales pour attribuer un crédit partiel dans le dernier cas. Le modèle d'analyse multidimensionnelle que nous proposons permet un codage qualitatif visant une transversalité sur l'ensemble des tâches de l'évaluation diagnostique. Il est fondé sur la praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre élémentaire. Nous proposons une analyse praxéologique *a priori* de la tâche. Nous distinguons des stratégies de résolution qui impliquent une technique arithmétique appuyée sur une preuve par l'exemple numérique, de celles qui mettent en jeu une technique algébrique pour produire une expression algébrique, la calculer et prouver algébriquement l'assertion. Nous décrivons les réponses sur quatre dimensions : la réponse est-elle valide ? la réponse implique-t-elle l'usage de l'outil algébrique pour généraliser ou prouver et comment ? que met en jeu la traduction du programme en une expression arithmétique ou algébrique ? quel mode de calcul ? (Grugeon, 1997).

La première dimension d'analyse concerne la validité (V) : V1 si la réponse est correcte avec un niveau technologique attendu, V2 si la réponse est correcte avec un niveau technologique faible (cf. plus bas), V3 si la réponse est incorrecte.

Au-delà de l'information concernant la validité de la réponse, nous proposons trois dimensions :

- EA : le mode de transformation des expressions algébriques dans des tâches de calcul,
- J : le mode de raisonnement ou de justification utilisé dans des tâches de résolution de problèmes (modélisation, …, preuve),
- T : le mode de traduction ou d'interprétation (T) dans des tâches de traduction ou d'interprétation (Grugeon-Allys et al., 2012).

Nous définissons, pour chacune des dimensions, des modes technologiques permettant un codage transversal des techniques utilisées par les élèves sur l'ensemble des tâches du diagnostic selon les éléments technologico-théoriques les sous-tendant : (1) Technologie idoine au niveau scolaire concerné, (2) Technologie faible (Wozniak, 2012) au niveau du manque de discours justifiant les techniques ou de leur emploi, (3) Technologie incomplète relativement à certains aspects épistémologiques de l'algèbre élémentaire (processus de modélisation, processus de preuve, prise en compte de la structure des objets, de leur équivalence, de la dialectique numérique / algébrique, ..), (4) Technologie appuyée sur l'arithmétique.

Nous l'illustrons pour la dimension transformation des expressions algébriques (EA). Les modes technologiques EA1, EA2, EA3, EA4 (Grugeon-Allys & al., 2012), caractérisent les propriétés et différents niveaux de discours justifiant les transformations algébriques associés aux praxéologies de calcul mises en œuvre par les élèves :

- EA1 : technologie algébrique idoine prenant en compte l'équivalence des expressions, l'aspect structural et procédural des expressions, la dialectique numérique / algébrique, avec une justification *via* des propriétés algébriques,
- EA2 : technologie algébrique idoine mais faible (usage correct des propriétés dans des tâches peu complexes, faible mobilisation d'un discours justifiant les propriétés utilisées),
- EA3 : technologie incomplète ou inadaptée reposant sur les aspects syntaxiques des expressions algébriques, des équations, sans appui sur les aspects sémantiques, qui laisse vivre des règles formelles erronées ou utilisées en dehors de leur domaine de validité ou des justifications du type « on n'a pas le droit d'ajouter des lettres et des nombres »,
- EA4 : technologie arithmétique (cf. 2.2) laissant vivre des erreurs liées à une non négociation de la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre (lettre étiquette, dilemme processus/objet, non respect des priorités opératoires, démarches et raisonnements arithmétiques lors de la résolution de problèmes).

Nous codons les réponses r1, r2, r3, r4 comme suit :

Codage de r1 : V3, EA4, J4, T4[11]. r1 met en jeu une stratégie arithmétique, une preuve par l'exemple, les expressions numériques étant écrites pas à pas enchainées, l'usage du signe d'égalité étant incorrect (étiquette).

Codage de r2 : V3, EA2, J4, T2. Contrairement à la précédente, la traduction est correcte et met en jeu l'aspect procédural du processus de calcul.

Codage de r3 : V3, EA42, J3, T4. r3 met en jeu un usage de lettres, mais les expressions sont écrites pas à pas enchainées (sans prise en compte de l'égalité comme relation d'équivalence), et les transformations relèvent de la concaténation (dilemme processus/objet).

Codage de r4 : V1, EA1, J1, T1. r1 est une solution idoine codée .

L'analyse praxéologique *a priori* des techniques attendues ou envisageables et des éléments technologico-théoriques mis en jeu permet donc un codage en termes de modes technologiques utilisables sur l'ensemble des tâches de l'évaluation diagnostique. Contrairement aux pratiques usuelles en évaluation, nous ne codons pas une technique localement au niveau de la tâche, ce qui conduirait à une multiplicité de codes différents selon les tâches, inexploitables pour une analyse transversale des codes sur l'ensemble du test. Le modèle d'analyse multidimensionnelle permet une description globale des « cohérences de fonctionnement » (Grugeon, 1997) à partir d'une remontée du niveau microscopique d'analyse des modes technologiques sous-tendant les techniques pour chaque tâche à un niveau plus synthétique de description sur l'ensemble des tâches.

2.4.2 Evaluation globale : Profil de l'élève en algèbre élémentaire puis géographie de classe

Nous définissons le profil de l'élève en algèbre comme une description, en termes de cohérence, des traits caractéristiques de son rapport personnel à l'algèbre élémentaire sur les tâches de l'évaluation diagnostique. Pour ceci, nous établissons, par une analyse transversale, une synthèse des modes technologiques mis en jeu, sur chaque dimension. Ainsi, nous décrivons le profil sur trois composantes *usage de l'algèbre (UA)*, *calcul algébrique (CA),*

[11] Elle est codée T451, 51 indique une mise en relation entre le registre du langage naturel et le registre des écritures numériques. Les deux derniers chiffres indiquent les registres de représentation sémiotique mis en jeu.

traduction - génération (entre différents registres sémiotiques) (T)[12] relativement aux praxéologies de modélisation et de preuve, aux praxéologies de calcul, aux praxéologies de traduction (Grugeon-Allys & al., 2012). Une échelle à trois ou quatre niveaux permet de situer le niveau technologique sur chaque composante (Delozanne & al., 2010). La détermination du niveau technologique prend en compte le pourcentage de réussite aux tâches et les modes technologiques. Par exemple, pour la composante CA, trois niveaux technologiques sont définis : (CA1) calcul raisonné et contrôlé, fondé sur l'équivalence des expressions, (CA2) calcul appuyé sur des règles syntaxiques sans prise en compte de l'équivalence des expressions, (CA3) calcul laissant vivre une technologie arithmétique[13].

Au niveau de la classe, les élèves de profils proches sont regroupés dans des groupes selon les trois niveaux CA1 (groupe A), CA2 (groupe B) et CA3 (groupe C) (figure 12, annexe 3). Cette description vise à donner des informations au professeur sur les besoins d'apprentissage des élèves pour définir des pistes afin de réguler l'enseignement.

2.5 Réguler l'enseignement selon les besoins d'apprentissage des élèves

Un des enjeux d'une évaluation diagnostique est de repérer les besoins d'apprentissage des élèves au regard des programmes et de favoriser l'organisation d'une régulation de l'enseignement selon les besoins d'apprentissage repérés des élèves. A un niveau global, l'étude épistémologique et didactique (§ 2.2) a permis de dégager les aspects épistémologiques caractéristiques du savoir à enseigner, pour une reprise de savoirs anciens ou l'introduction de savoirs nouveaux. De plus, cette étude permet de mettre en relation les besoins d'apprentissage des élèves d'une classe à des aspects épistémologiques relatifs à l'algèbre implicites dans les programmes ou des praxéologies mathématiques peu présentes dans l'enseignement des professeurs ou ne favorisant pas le travail de certaines techniques et éléments technologico-théoriques, par exemple les praxéologies *Prouver l'équivalence (ou non) de deux programmes de calcul (ou d'expressions algébriques)*. Pilet (2012) propose des Parcours d'Enseignement Différencié (PED), correspondant aux aspects épistémologiques relatifs aux expressions algébriques à travailler. Les tâches des PED ont le même objectif d'apprentissage, mais les tâches diffèrent par les valeurs de certaines variables didactiques en fonction des besoins d'apprentissage de groupes d'élèves. Nous présentons ces parcours au paragraphe 4.

A une échelle locale, l'enjeu est d'amener les élèves à étudier la validité d'une technique, à la justifier à partir d'arguments idoines, mais aussi d'interroger le discours justificatif utilisé. Nous faisons l'hypothèse qu'une meilleure connaissance des critères d'analyse des modes technologiques impliqués dans le processus de réponses des élèves, suite à l'évaluation, peut faciliter pour l'enseignant la gestion des interactions en classe. Par exemple, pour invalider une assertion du type « $2x + 3 = 5x$ est-elle vraie pour toutes valeurs de x ? », les élèves du groupe C utilisent souvent des arguments de type légal « On n'a pas le droit d'ajouter les lettres et les nombres ». Il s'agit d'amener ces élèves à utiliser un contre-exemple pour invalider et rencontrer ainsi le statut d'indéterminée de x. Le professeur peut alors amener les élèves à construire un rapport à la rationalité mathématique idoine, en développant une dynamique « évaluation – prise d'informations » / « régulation - gestion d'interactions »

[12] Les composantes reprennent les trois types d'activité du modèle GTG de Kieran (2007).
[13] CA1 s'obtient à partir d'une majorité de codes EA1 et EA2 ; CA2 s'obtient à partir d'une majorité de codes EA3 ; CA3 s'obtient quand le nombre de codes EA4 est supérieur à celui des codes EA3.

appuyée sur des éléments mathématiques et didactiques pertinents et à favoriser la mise en place d'un contrat didactique au service des apprentissages (Grugeon-Allys, 2015).

3. Méthodologie de conception d'une évaluation diagnostique à visée formative

3.1 Une méthodologie fondée sur un cadre épistémologique de référence

Nous fondons la conception d'une évaluation diagnostique sur le cadre épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire, selon le niveau scolaire en jeu, c'est-à-dire, la conception des tâches diagnostiques, de l'analyse et du codage des réponses, l'interprétation des résultats (profils des élèves et bilan de classe) et leur exploitation pour réguler l'enseignement en fonction des besoins d'apprentissages repérés.

3.1.1 Le modèle didactique des tâches diagnostiques

- Nous définissons les tâches d'une évaluation diagnostique comme un échantillon de l'ensemble des types de tâches constitutifs des praxéologies relatives à l'algèbre élémentaire visées (Chevallard, 2007), praxéologies de modélisation ou de preuve, praxéologies de calcul, praxéologies de traduction (§ 2.2). Ce critère valide l'aspect épistémologique et didactique de la validité d'une évaluation, ici l'évaluation diagnostique *Pépite* (Grugeon-Allys et Grapin, 2015). Les tâches diagnostiques de *Pépite* sont représentatives et recouvrent le domaine de l'algèbre élémentaire. Nous caractérisons chaque tâche diagnostique par : un type de tâche, la complexité des objets, le niveau d'intervention des types de tâche (Castela, 2008 p. 152), les registres sémiotiques mis en jeu, les techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés. Ce point de vue nous permet d'adapter le diagnostic à différents niveaux d'enseignement (Chenevotot-Quentin et al., 2012).
- En ce qui concerne les énoncés, nous distinguons plusieurs formats de tâches, des QCM, des questions ouvertes à réponse courte ou longue.
- L'analyse et le codage de réponses s'appuient sur le modèle d'analyse multidimensionnelle des praxéologies mises en œuvre par les élèves sur les quatre dimensions V, EA, J et T (§ 2.4), permettant une description des modes technologiques développés par les élèves dans la résolution de chaque tâche diagnostique.

3.2 Le diagnostic automatisé Pépite en algèbre élémentaire

Nous présentons maintenant l'évaluation diagnostique *Pépite* fondée sur la praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre élémentaire au niveau du collège (grade 6 à 9). Nous l'illustrons au niveau du grade 8.

3.2.1 Le modèle didactique du test diagnostique

Les dix tâches diagnostiques[14] du test se répartissent selon trois types de tâches : (1) les tâches de calcul (*développer* et *factoriser* des expressions algébriques, *résoudre* des équations), (2) les tâches de *modélisation et de preuve* (produire des expressions, mettre en équation, prouver des propriétés), (3) les tâches de *traduction* ou d'*interprétation* (de relations mathématiques). Les

[14] Une tâche peut être subdivisée en questions indépendantes nommées items.

items sont soit des QCM, soit des questions ouvertes à réponse courte ou longue. Des tâches du test *Pépite* à l'entrée du grade 8 sont présentées : Figures 1 et 2 (tâche de généralisation) et en annexe 1 (Figures 6, 7, 8, 9, 10). Les tableaux 1 et 2 montrent la répartition des types de tâches des tests aux grades 6 et 8.

Tableau 1 *:* Répartition des types de tâches du test de grade 8 (Chenevotot-Quentin & al., 2016)

Types de tâches	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 27	5.1 / 5.2 / 5.3 / 5.4
Modélisation, Preuve	7 / 27	3.1 / 8.1 / 8.2 / 8.3 / 9 / 10.2 / 10.3
Traduction ou interprétation	16 / 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 6 / 7 / 10.1

Tableau 2 : Répartition des types de tâches du test grade 6 (Chenevotot-Quentin & al., 2016)

Types de tâches	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 22	7.1 / 7.2 / 8.1 / 8.2
Production, Modélisation	3 / 22	3.1 / 5 / 6
Traduction ou interprétation	14 / 22	1.1 / 1.2 / 1.3 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 10

En appui sur l'étude épistémologique et celle des programmes, à partir de l'analyse praxéologique *a priori* des tâches, nous sélectionnons des valeurs des variables didactiques pour déterminer des tâches représentatives de types de tâches du domaine algébrique, des savoirs et raisonnements visés par les techniques associées, à un niveau scolaire donné. Il en est de même pour les distracteurs des QCM qui sont sélectionnés pour correspondre à des techniques et des erreurs envisageables. Voici deux tâches du type de tâches *généraliser* et *prouver* des grades 8 (figure 1) et 6 (figure 2).

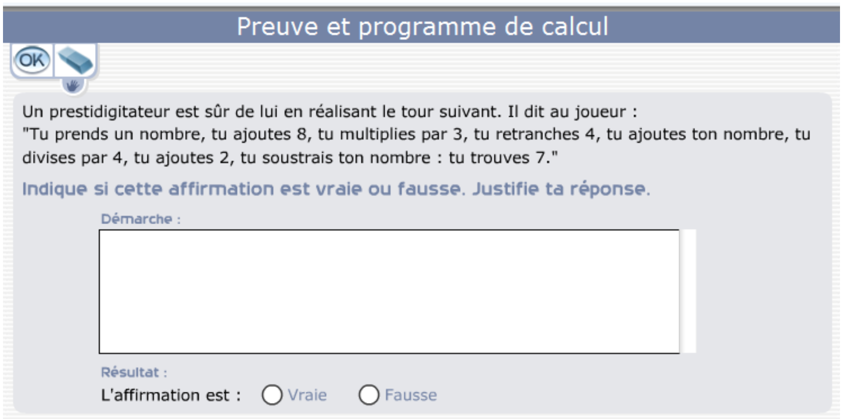


Figure 1 : « Preuve et programme de calcul » du grade 8

Un élève dit à un camarade : « Tu prends un nombre, tu ajoutes 6 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3, tu soustrais le triple du nombre de départ. ». Cet élève affirme qu'on trouve toujours le même résultat. Cette affirmation est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? Justifie ta réponse.

Figure 2 : « Preuve et programme de calcul » de niveau 5ème / 4ème

Ces deux tâches de preuve visent à tester si les élèves mobilisent l'outil algébrique pour produire des expressions générales puis prouver une propriété. L'expression produite au grade 8, $((x + 8) \times 3 - 4 + x) / 4 + 2 - x$, met en jeu sept opérations et deux niveaux de parenthésage, celle de 5[e], $(x+6) \times 3 - 3x$, trois opérations et un seul niveau de parenthésage (Chenevotot-Quentin & al., 2016).

3.2.2 L'analyse de réponses

L'analyse de réponses s'appuie sur l'étude épistémologique (§ 2.2) et les réponses sont codées selon les quatre dimensions *Validité (V)*, transformation des expressions algébriques (EA), justification (J), traduction (T) et modes technologiques mis en jeu dans les techniques utilisées selon les éléments technologico-théoriques mobilisés (§ 2.4). L'analyse d'une tâche peut convoquer plusieurs dimensions, la résolution d'une tâche pouvant convoquer plusieurs types de tâches.

3.2.3 Les résultats de l'évaluation diagnostique Pépite

L'évaluation diagnostique Pépite conduit à trois résultats :

- le profil de l'élève en algèbre élémentaire caractérisant les traits dominants de l'activité algébrique de l'élève sur trois composantes : *usage de l'algèbre (UA)*, *calcul algébrique (CA), traduction - génération (entre différents registres sémiotiques)* (T) (Figure 11, annexe 2). Le codage des réponses, la liste des propriétés utilisées, la liste des erreurs sont aussi accessibles au professeur ;
- le bilan de la classe avec les groupes A, B et C (Figure 12, annexe 2) ;
- des parcours d'enseignement différenciés à proposer en fonction des besoins d'apprentissage des élèves, mis en évidence à partir de l'évaluation diagnostique (Pilet 2012).

3.2.4 Le modèle informatique

Réalisé dans le cadre d'une recherche en EIAH, le développement informatique du système *Pépite* s'inscrit dans une démarche itérative, conception des prototypes, expérimentation en situation avec des enseignants, évolution de la modélisation et recommencement du cycle. Le modèle informatique prend en compte le modèle didactique (Delozanne et al., 2010). Ce système est implémenté sur la plateforme en ligne *LaboMep*[15] (Grugeon-Allys & al., 2011 ; Pilet & al. 2013). Le système est composé de quatre modules, un module de test *PépiTest*, un module de diagnostic *PépiDiag*, un module *PépiProf* pour présenter le profil des élèves et le

[15] https://www.labomep.net. *LaboMep* est développée par les enseignants de l'association *Sesamath* (http://www.sesamath.net/)

bilan de la classe, et le module *PépiPad* pour proposer des tâches adaptées selon les groupes d'élèves en fonction d'un objectif d'apprentissage choisi par le professeur.

PépiTest génère automatiquement les dix tâches diagnostiques et recueille les réponses des élèves. A chaque tâche est associée une grille d'analyse de réponses (Darwesh, 2010, Annexes p.190-202). Une partie de la grille d'analyse des réponses (tableau 3) pour la tâche « Preuve et programme de calcul » est présentée en annexe 3.

Pépidiag interprète les réponses des élèves à chaque tâche de *PepiTest* en appliquant des heuristiques dérivées du modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances en algèbre élémentaire. Pour ceci, *PépiDiag* utilise *PépiGen* pour générer les réponses anticipées, analyser automatiquement les réponses des élèves puis les coder. *PépiGen* convoque le calculateur algébrique *Pépinière* (Delozanne & al., 2008) pour analyser les expressions numériques ou algébriques.

PépiProf est le module destiné aux enseignants. A partir d'une analyse transversale des codes, il produit les profils en algèbre élémentaire des élèves et le bilan de la classe et les affiche sur la plateforme (Delozanne et al., 2010). Le bouton *Parcours différenciés* permet à l'enseignant de sélectionner un objectif d'apprentissage parmi ceux proposés : revenir sur le rôle de l'algèbre élémentaire, revenir sur le rôle des règles de formation et de transformation des expressions algébriques, étudier des expressions équivalentes, associer des expressions algébriques à d'autres représentations, étudier la structure des expressions algébriques (figure 12, annexe 2).

Pépipad générateur de Parcours d'Enseignement Différencié, associe à chaque groupe d'élèves des exercices, en fonction de l'objectif choisi par l'enseignant, des exercices issus d'une banque d'exercices du domaine algébrique, de complexité adaptée à chaque groupe.

4. Évaluation diagnostique et régulation de l'enseignement

Une expérimentation a été menée en 2011-2013 avec trois enseignants. Ces enseignants ont participé à un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs dans le cadre du groupe IREM « Différenciation des pratiques d'enseignement en calcul littéral » à l'université Paris-Diderot, mené pendant deux ans. Nous présentons la méthodologie mise en place pour étudier l'usage du logiciel *Pépite*, l'exploitation des résultats de l'évaluation diagnostique pour repérer des besoins d'apprentissage des élèves et engager une régulation de l'enseignement puis donnons des résultats en ce qui concerne l'enseignante Garance.

4.1 L'expérimentation dans la classe de Garance : méthodologie et recueil de données

Méthodologie : Nous avons organisé une expérimentation au cours de l'année 2011-2012, dans la classe de grade 8 (23 élèves) de l'enseignante Garance, pour sa séquence d'enseignement en algèbre élémentaire : passation de l'évaluation diagnostique *Pépite* en début de progression, prise en compte des résultats de l'évaluation, modification et mise en œuvre de la séquence sur une durée de trois semaines.

Recueil et analyse des données : Nous avons recueilli les résultats de l'évaluation *Pépite*, passée avant le début de la séquence, les différences séances constitutives de la séquence d'enseignement portant sur les expressions algébriques, les feuilles d'exercices proposés, le cours écrit dans les cahiers des élèves, les résultats de l'évaluation *Pépite* passée après la séquence, les vidéos de trois séances de classes, un bilan de Garance sur l'usage de *Pépite*. A partir de la praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre, nous avons analysé les praxéologies enseignées par Garance pour repérer les nouvelles praxéologies proposées aux élèves afin de prendre en compte leurs besoins d'apprentissage suite au diagnostic. Nous avons aussi analysé s'il y avait une évolution dans la prise en compte des procédures et erreurs des élèves, et une évolution du discours enseignant concernant la justification des techniques utilisées lors des types de tâches relatifs à l'algèbre élémentaire.

4.2 Quelques résultats sur la régulation de l'enseignement

Nous présentons les résultats du diagnostic *Pépite* et les modifications apportées par Garance à son enseignement (Pilet, 2012).

Le bilan de la classe (Figure 12, annexe 2) indique seize élèves en groupe C et sept élèves en B. Seul un élève convoque l'outil algébrique pour résoudre des problèmes de généralisation et de preuve. Les élèves du groupe C développent une activité relevant principalement de la technologie arithmétique, tant pour le *calcul* que pour l'*usage de l'algèbre* pour résoudre des problèmes. L'usage de l'évaluation *Pépite* a ainsi donné des informations à Garance concernant les besoins d'apprentissage de ses élèves. Elle considère que c'est un apport par rapport à sa pratique ancienne où elle classait les élèves en « bons », « moyens », « faibles ».

En effet, Garance s'est appuyée sur les résultats de l'évaluation *Pépite* pour définir de nouvelles tâches. Après avoir étudié les types de tâches proposés à ses élèves en 2010-2011, elle a décidé d'ajouter trois séances au sein de sa progression habituelle impliquant de nouvelles praxéologies, praxéologie de modélisation et de preuve, praxéologie d'interprétation (Cf. Figure 3). Cela correspond à trois Parcours d'Enseignement Différencié. Garance a ainsi organisé la reprise de savoirs anciens sur des aspects épistémologiques relatifs à l'algèbre pour poursuivre la construction du bloc technologico-théorique relatif aux expressions algébriques :

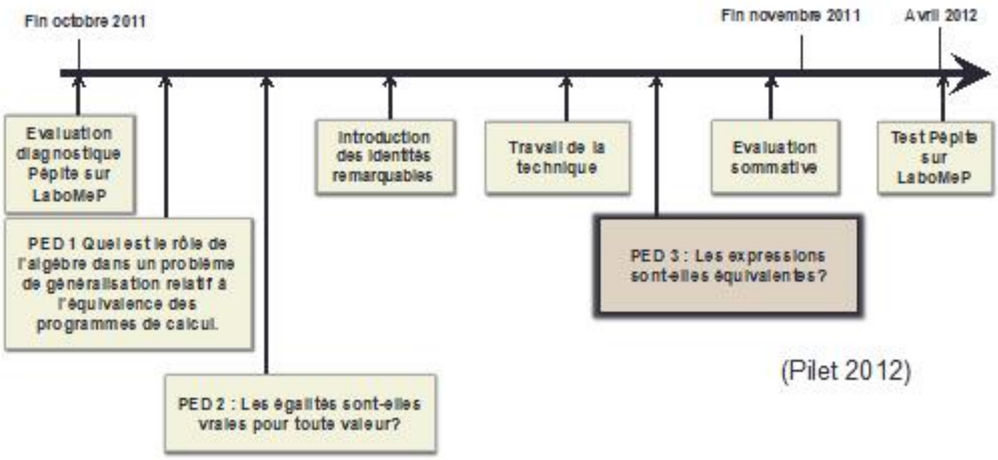


Figure 3 : Processus d'enseignement de Garance en calcul algébrique (Pilet, 2012)

- Le premier PED1 vise à amener les élèves à comprendre la raison d'être des expressions algébriques en résolvant un problème de *généralisation*, de *preuve,* ayant pour but de produire des programmes de calcul pour dénombrer une collection de carrés unités et déterminer leur équivalence. L'objectif est de poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques, propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et contre-exemple numérique pour valider / invalider l'équivalence de deux expressions algébriques ;

- Les deux autres parcours (PED2 et PED3) visent à amener les élèves à étudier si des expressions sont équivalentes afin de reconnaître leur structure, de développer la dialectique algébrique / numérique (substitution d'une lettre par un nombre pour trouver un contre-exemple et invalider une assertion) et de prouver leur équivalence (convocation de la propriété de distributivité pour prouver une assertion vraie)[16]. Voici un exemple de tâche : L'assertion « $a(a+1) = 3a$ est-elle vraie pour toutes valeurs de a ? » ;

- Pour le PED1, les tâches proposées visent à donner une raison d'être aux expressions algébriques et sont adaptées aux deux groupes B et C en fonction des valeurs attribuées aux variables didactiques les caractérisant (degré de l'expression algébrique).

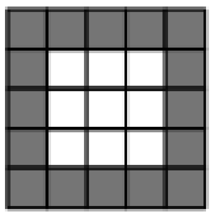
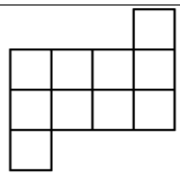
Pattern 1 (groupe C)		Pattern 2 (Groupe B)	
	$4x + 4$ $4(x+1)$ $2x + 2(x+2)$ $4(x+2) - 4$		$(a+2)^2 - 2(a+1)$ $a^2 + 2(a + 1)$ $a(a+2) + 2$ $a^2 + 2a + 2$

Figure 4 : les patterns selon les deux groupes B et C d'élèves

Les tâches de généralisation ont pour but de dénombrer, d'une part pour le groupe C le nombre de carrés unités grisés entourant un carré blanc de n carrés unités blancs, d'autre part pour le groupe B, le nombre de carrés unités blancs du pattern donné. Plus la valeur de n augmente, plus les élèves devraient percevoir les limites du comptage et la nécessité de produire des expressions générales. Les tâches diffèrent par les patterns en jeu (Figure 4) car les programmes de calcul conduisent soit à des expressions du premier degré, soit à des expressions du second degré (Pilet, 2012).

Pendant cette séquence, Garance a aussi davantage pris en compte des procédures et erreurs des élèves. Elle a commencé à faire évoluer son discours pour valider ou invalider la justification des techniques utilisées dans des praxéologies de preuve, par la mobilisation de contre-exemples dans le cas d'assertion fausse, mais tout en conservant encore des justifications de type légal « on n'a pas de droit d'ajouter des lettres et des nombres ».

[16] Les analyses *a priori* développées dans Pilet (2012) distinguent l'analyse *a priori* praxéologique des tâches, techniques visées mais aussi procédures et erreurs envisageables, de celle de la gestion du déroulement c'est-à-dire des phases de recherche, de mise en commun pour formuler et valider les productions des élèves et de l'institutionnalisation.

5. Discussion et perspectives

5.1 La question de la validité d'une évaluation

Dans cet article, nous avons montré les apports des outils conceptuels de la didactique des mathématiques et, plus particulièrement d'une approche multidimensionnelle, pour définir une méthodologie de conception d'une évaluation diagnostique au service des apprentissages des élèves et de la régulation de l'enseignement. La définition d'une praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre élémentaire et d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des praxéologies mises en œuvre par les élèves fonde la validité de l'évaluation diagnostique au regard du contenu mathématique. Ici, c'est un mode de validation interne propre à la didactique des mathématiques en termes d'analyses praxéologiques *a priori* qui justifie et rend intelligibles la méthodologie de conception de l'évaluation et l'exploitation des résultats qui en est faite. La méthodologie de conception a été transférée dans le domaine arithmétique sur les entiers par Grapin (2015), ce qui ouvre de nouvelles perspectives.

En revanche, la question de l'aspect psycho-didactique (Vantourout et Goasdoué, 2014) de la validité de l'évaluation n'a pas été prise en compte dans la conception de l'évaluation *Pépite* et le choix des énoncés non analysé. Or, un énoncé de tâche doit être pertinent au regard des processus de réponse potentiels, c'est-à-dire, doit permettre aux élèves de s'engager dans l'activité au regard de ce qui est évalué. Il est donc nécessaire de poursuivre cette étude.

En ce qui concerne les évaluations standardisées comme CEDRE[17], la méthodologie de conception est très différente de celle de l'évaluation dans une approche didactique. De telles évaluations sont définies sur le modèle de réponse à l'item (MRI)[18], modèle fortement ancré sur l'hypothèse d'unidimensionnalité et l'indépendance des items. La validité de telles évaluations est liée à la structure interne du test pour vérifier l'unidimensionnalité et s'appuie sur les caractéristiques psychométriques des items, calculées *a posteriori* de leur conception (Rocher, 2015) : la variété des niveaux de difficulté des items et le pouvoir de discrimination des items. La recherche menée dans le cadre du projet ANR NéoPraéval, nous amène à interroger la mise en perspective d'approches didactique et psychométrique pour proposer une méthodologie d'expertise associant les apports des deux approches en ce qui concerne la validité d'une évaluation. En quoi l'approche didactique permettrait-elle d'enrichir la conception des items d'une évaluation standardisée et d'interroger les résultats ? (Grugeon-Allys et Grapin, 2015). En quoi l'approche psychométrique favoriserait-elle la fidélité de l'évaluation *Pépite* ?

5.2 Les apports de l'évaluation diagnostique sur les apprentissages des élèves

Lors de l'expérimentation présentée plus haut, à la fin de l'année scolaire 2011-2012, les 98 élèves de trois classes de grade 8 ont passé à nouveau l'évaluation *Pépite*. L'étude des résultats sur 98 élèves de grade 8 obtenus entre le premier et le deuxième passage de l'évaluation

---

[17] *CEDRE* : Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillons menées par la Direction de l'Evaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP) du Ministère de l'Education Nationale tous les six ans en mathématiques

[18] Les MRI sont une classe de modèles probabilistes. Ils modélisent la probabilité qu'un élève donne une certaine réponse à un item, en fonction de paramètres concernant l'élève et l'item.

diagnostique *Pépite* met en évidence une augmentation des niveaux technologiques sur toutes les composantes, dont près de 30% sur la composante (CA) (Cf. figure 5). En revanche, des élèves trop loin des attentes institutionnelles ou démobilisés ne profitent pas beaucoup de l'enseignement. Nous faisons l'hypothèse que cette évolution est à mettre en relation avec l'organisation de l'évaluation diagnostique *Pépite* et de l'enseignement mené, tant au niveau global des praxéologies nouvelles travaillées que de la gestion de la validation des réponses entre élèves au niveau local. Mais cette évolution semble fragile et nécessite une modification importante des pratiques des enseignants.

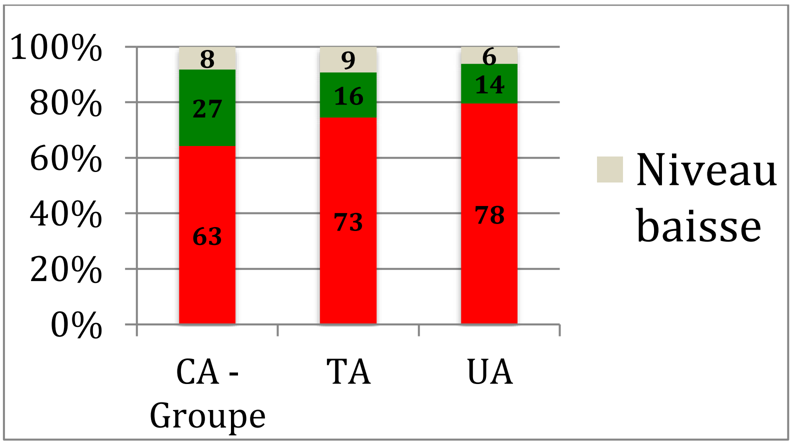


Figure 5 : Evolution des niveaux sur chaque composante (Pilet, 2012).

Nous pouvons envisager une autre perspective pour faire évoluer le rapport personnel des élèves à l'algèbre : responsabiliser davantage les élèves dans la prise en charge du vrai et du faux en algèbre, en proposant des situations pour amener les élèves à développer les justifications sur les techniques utilisées. Les situations du type « Faire « faux » » de (Sackur & al., 1997) peuvent permettre de travailler des connaissances locales des élèves et de rechercher leur domaine de validité.

6. Références

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Hors-série, 137-162. Grenoble : La pensée sauvage.

Bosch, M. & Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (Dir) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 197–122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chenevotot-Quentin, F., Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Delozanne, E. & Prévit, D. (2016). The diagnostic assessment Pépite and the question of its transfer at different school levels. In *Proceedings of the Ninth Congress of the European society for Research in Mathematics Education CERME9* (pp. 2326-2332). Prague, République Tchèque, 4 au 8 février 2015.

Chenevotot-Quentin, F., Grugeon, B., Pilet, J. & Delozanne, E. (2012). De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In Dorier J.L. (Ed) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2012, Enseignement et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle* (pp. 808-823). Genève, Suisse, 3 au 7 février 2012.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F.K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, II* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Castela C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28*(2), 135–182.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51–94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43–75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19*(2), 221 – 266.

Chevallard, Y. (2007). Une épreuve expérimentale de mathématiques ? http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Une_epreuve_experimentale_de_mathematiques.pdf

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Hors-série, 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

Coulange L. & Grugeon B. (2008). Pratiques d'une enseignante dans la gestion d'une situation d'enseignement destinée à des élèves en difficulté en algèbre. *Petit x, 78*, 5-23.

Dalibard, E. & Pastor, J.-M. (2015). CEDRE 2014 - Mathématiques en fin d'école primaire : les élèves qui arrivent au collège ont des niveaux très hétérogènes. *Note d'information*, *18*, MEN - DEPP.

Darwesh, A. (2010). *Diagnostic en EIAH : le système PépiMep.* Thèse de doctorat. Université UPMC – Sorbonne universités.

Delozanne, É., Prévit, D., Grugeon, B. & Chenevotot, F. (2008). Automatic Multi-criteria Assessment of Open-Ended Questions: a case study in School Algebra. In *Proceedings of ITS'2008*, Montréal, juin 2008, LNCS 5091, Springer, 101-110.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon-Allys, B. & Chenevotot-Quentin, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétence, *Revue de Technique et Sciences Informatiques*, *29*, 8-9 / 2010, Hermes-Lavoisier, Paris, 899-938.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques. 7*(2), 5-32.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(3), 349–380.

Gascon, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à « l'arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*. *17*(2), 167–210.

Grugeon-Allys, B. & Grapin, N. (2015). Validité d'une évaluation externe. Complémentarité des approches didactique et psychométrique. In A-C. Mathé & E. Mounier (Eds.) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques, 2015*. Paris : IREM Paris 7.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F. & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques,* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Hors-série, 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Delozanne, E., Chenevotot, F., Vincent, C., Prévit, D. & El Kechai, N. (2011). Pépimep : Différencier l'enseignement du calcul algébrique en s'appuyant sur des outils de diagnostic. *MathémaTICE*, *24*. http://revue.sesamath.net/spip.php?article338

Kieran C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Douglas A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: New York Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age

Mottier Lopez, L. (2015). *Evaluations formative et certificative des apprentissages. Enjeux pour l'enseignement.* Bruxelles : De Boeck.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'Enseignement Différencié en algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

Pilet, J., Delozanne, E., Chenevotot, F., Grugeon-Allys, B., Prévit, D., & El-Kechai, N. (2013). Les outils Pépite sur LaboMeP : identifier des besoins d'apprentissage des élèves pour réguler l'enseignement. *MathémaTICE*, *37*. http://revue.sesamath.net/spip.php?article557

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.

Rocher, T. (2015). Mesure des compétences. Méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. *Éducation et Formations. 86/87*, 37–60.

Sackur, C., Drouhard, J-Ph, Maurel, M. & Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM, 28*, 37-68.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36

Vantourout, M. & Goasdoué, R. (2014). Approches et validités psycho-didactique des évaluations. *Éducation et Formation*, *e-302*. http://revueeducationformation.be/index.php?revue=20&page=3

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x, 22*, 51-69.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, in Laborde C. (Ed.). *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique* (pp. 189-99), La Pensée Sauvage, Grenoble.

Vergnaud, G., Cortès, A. & Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288), Editions La Pensée Sauvage.

Wozniak, F. (2012) Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Education et didactique. 6*(2), 65-88.

Annexe 1

- Des tâches de calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du premier degré ou se ramenant au premier degré

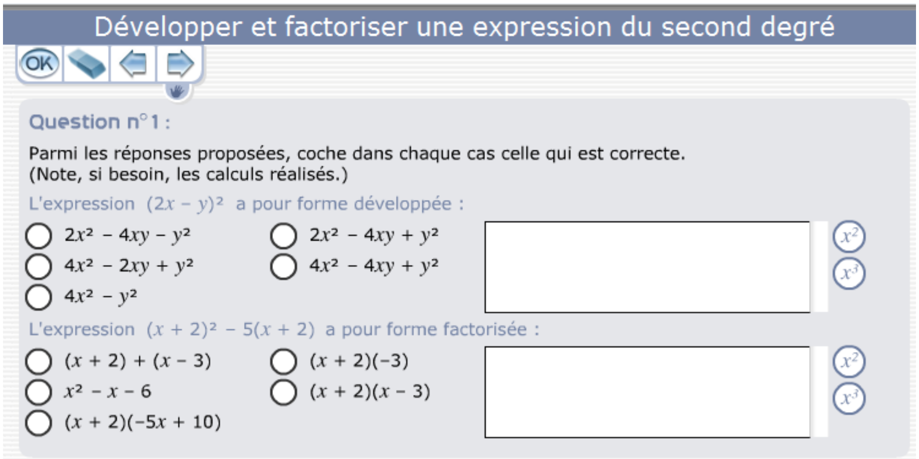


Figure 6 : « Développer et factoriser une expression du second degré »

- Des tâches de production d'expression, de formule

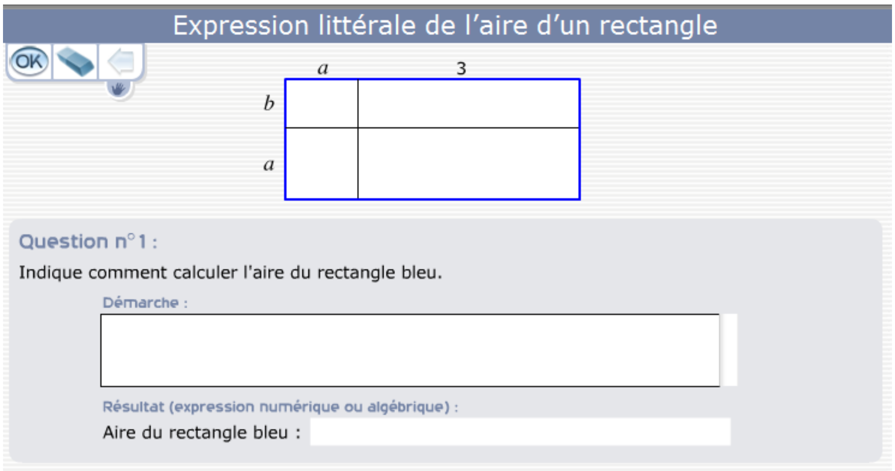


Figure 7 : « Expression littérale de l'aire d'un rectangle »

- Des tâches de reconnaissance de la structure d'une expression

  Ces tâches permettent de repérer la signification attribuée à des expressions (équivalence) et le niveau de raisonnement engagé par les élèves.

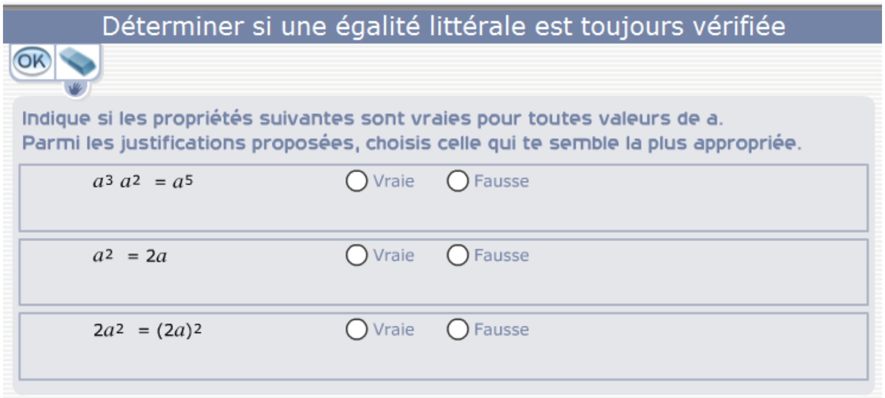


Figure 8 : « Déterminer si une égalité est toujours vérifiée »

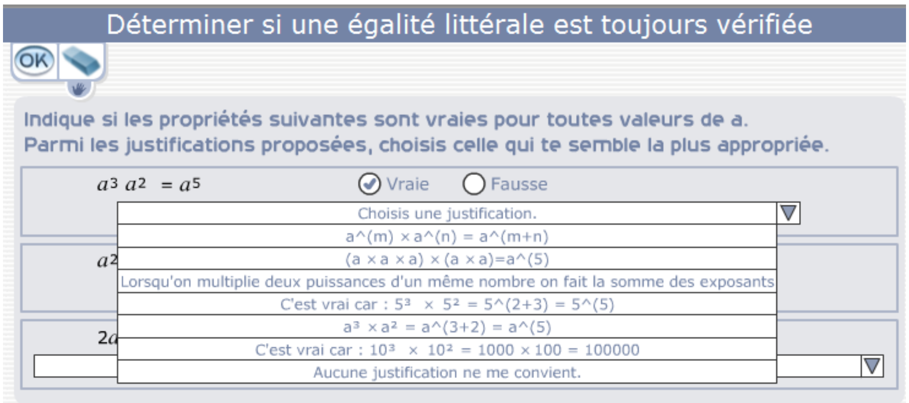


Figure 9: Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »

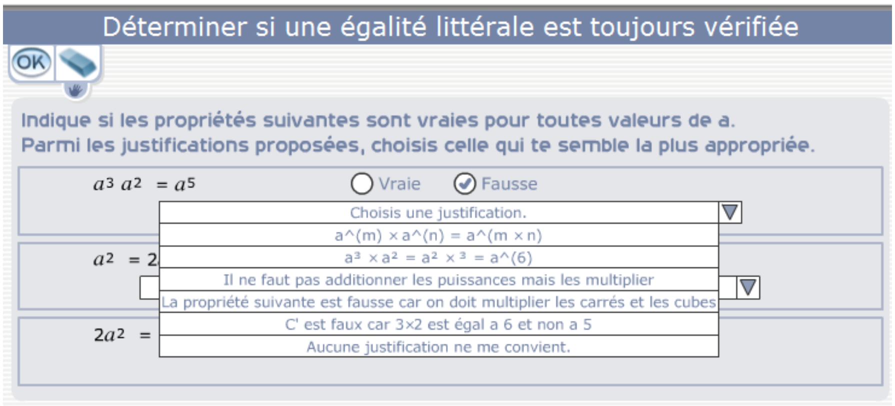
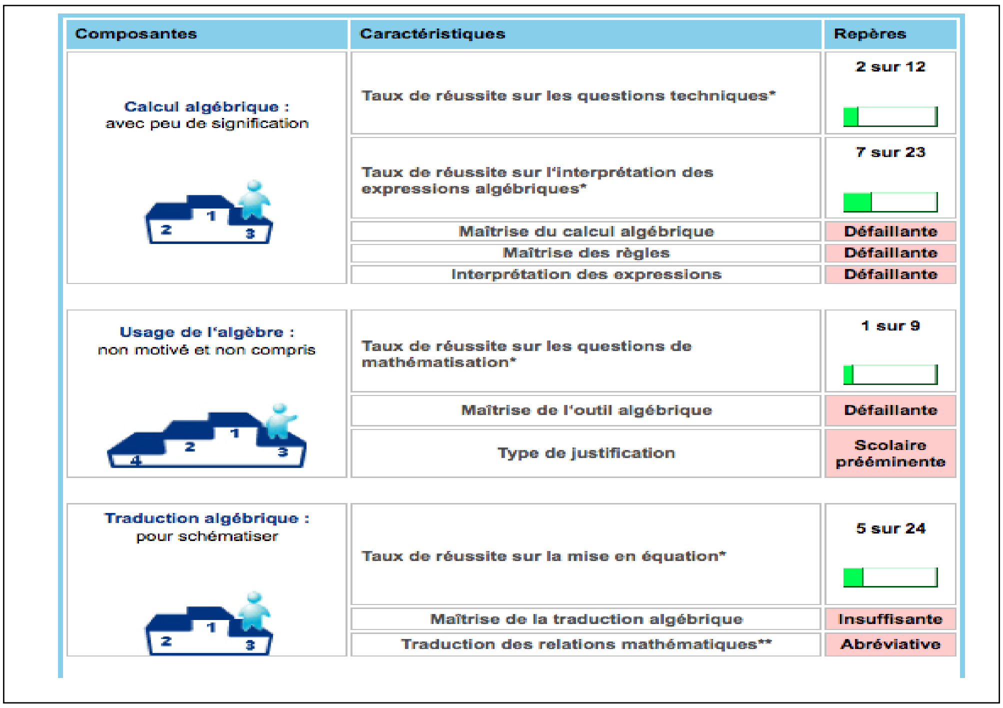


Figure 10 : Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « fausse »

Annexe 2



Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

Figure 11 : Bilan personnel d'un élève en algèbre élémentaire

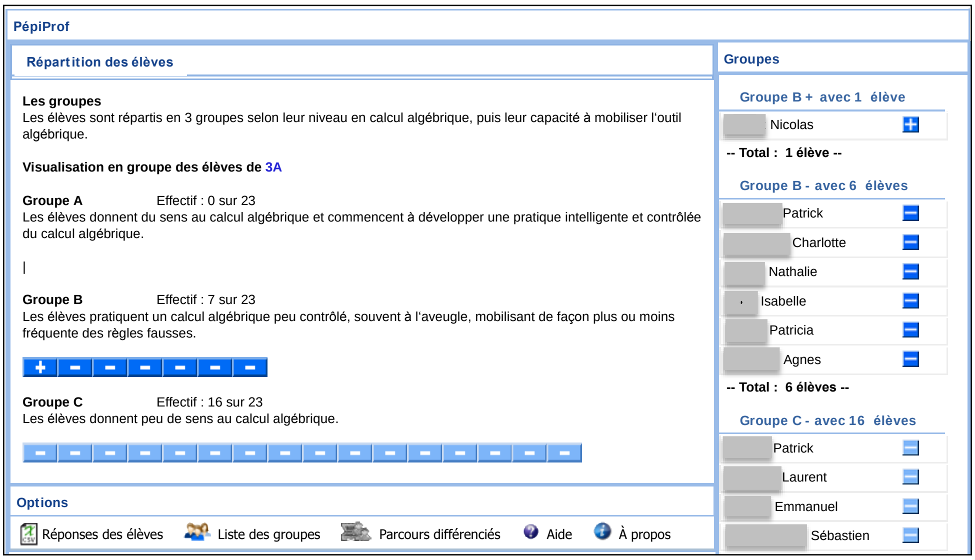


Figure 12 : bilan d'une classe en algèbre élémentaire

Annexe 3

Type	Commentaire	Code	Forme (à une Pépinière-équivalence près)
1	*Preuve algébrique avec une expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire*		
1.1	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée. L'expression comporte des fractions qui sont simplifiées	V1, L1, EA1, T122, J1, E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (x*3+24-4+x)/4+2-x = (4*x+20)/4+2-x = 4*x/4+5+2-x = x+5+2-x = 7
1.2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée .L'expression comporte des fractions qui sont réduites au même dénominateur	V1, L1, EA2, T122, J1, E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (x*3+24-4+x)/4+2-x = (4*x+20)/4+2-x = (4*x+20+8)/4-x = (4*x+28)/4-x = (4*x+28+4*(-x))/4 = 7

....

2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparé	V2, L1, EA1, T222, J1,E2	(x+8)*3 = x*3+24 3*x+24-4 = 3*x+20 3*x+20+x = 4*x+20 (4*x+20)/4 = x+5 x+5+2 = x+7 x+7-x = 7

....

13.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte mais la justification est incomplète	V3, L5, ENx, J2, T151, E1	Forme du type 1 avec x remplacé par une valeur numérique et une justification inachevée

Tableau 3 : quelques exemples de codes pour interpréter les réponses à la tâche 9