Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire : élaboration d'un outil diagnostique

Isabelle Demonty
Université du Luxembourg
isabelle.demonty@uni.lu

Joëlle Vlassis
Université du Luxembourg
joelle.vlassis@uni.lu

Résumé.
Cet article présente le processus de développement d'un questionnaire visant à évaluer les connaissances des enseignants pour enseigner l'algèbre élémentaire : ce questionnaire s'organise autour de 10 situations fictives relatives à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, dans lesquelles les enseignants sont amenés à réaliser et argumenter certains choix. Les diverses analyses réalisées pour tester la pertinence et la validité du questionnaire confortent l'idée selon laquelle la mesure de telles connaissances est loin d'être simple. Ces analyses ouvrent également une voie intéressante pour aider à mieux comprendre le caractère multidimensionnel des connaissances pour enseigner, même dans un domaine circonscrit comme l'algèbre élémentaire

Mots-clés
Connaissances pour enseigner, algèbre élémentaire, outil d'évaluation.

Summary
This paper reports on the process of developing a questionnaire to assess mathematical teachers' knowledge for teaching elementary algebra. This questionnaire is organized in 10 fictious situations concerning the learning and the teaching of elementary algebra. In these situations, teachers have to realize and to argue choices. The analyses realized to test both reliability and validity of the questionnaire consolidate the idea according to which the measure of such knowledge is complex. These analyses also open an interesting path to help understanding the multidimensional character of mathematical knowledge for teaching, even in a confined domain of elementary algebra.

Keywords
knowledge for teaching, elementary algebra, assessment tool

Pour citer cet article : Demonty, I. & Vlassis, J. (2016). Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire : élaboration d'un outil diagnostique. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation, 2*(2), pp. 45-62.

1. Introduction

Promouvoir un enseignement efficace des mathématiques implique, pour l'enseignant, de maitriser des compétences variées qui relèvent tant de la pédagogie et de la didactique que des mathématiques. Depuis quelques années, plusieurs chercheurs se sont attelés à définir les différentes facettes des connaissances mathématiques pour enseigner (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001 ; Ball, Thames & Phelps, 2008 ; Hill, Ball & Schilling, 2008). Ces recherches montrent l'importance mais aussi toute la complexité de cerner ce que les enseignants ont besoin de savoir pour enseigner.

En matière d'évaluation des connaissances pour enseigner, les problématiques actuelles de ce champ de recherches s'orientent dans deux directions (Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2009). D'une part, les chercheurs recommandent de concevoir des épreuves qui représentent les situations réellement rencontrées par les enseignants dans l'exercice de leur profession, et non plus d'évaluer les connaissances pour enseigner en tant que telles, en dehors de leur contexte d'utilisation. D'autre part, il devient nécessaire de cibler le questionnement non pas sur les mathématiques en général mais plutôt sur des contenus plus spécifiques, tels que l'algèbre, les probabilités ou la géométrie. Dans le domaine particulier de l'algèbre élémentaire, on déplore un manque d'outils permettant de porter un diagnostic valide sur ces connaissances pour enseigner (McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk, 2012).

S'insérant dans une recherche visant la formation continuée, notre contribution présente le processus d'élaboration d'un questionnaire à destination des enseignants centré sur les connaissances essentielles pour enseigner l'algèbre élémentaire. Ce questionnaire est organisé autour de 10 situations face auxquelles les enseignants sont amenés à réaliser des choix et, dans plusieurs situations, à justifier ceux-ci. Les données recueillies seront analysées selon une double perspective. D'une part, il s'agira de quantifier les écarts entre les prises de position des enseignants en les comparant aux constats évoqués dans la littérature de recherche relative à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Et d'autre part, il s'agira de porter un regard plus transversal sur les réponses apportées par les enseignants à différentes questions du questionnaire en vue d'aider à mieux comprendre l'influence des situations dans lesquelles les enseignants sont plongés dans leur pratique de classe quotidienne sur la mobilisation effective de leurs connaissances.

Construire un tel outil est une entreprise complexe : Hill et al. (2008) proposent deux types de critères pour y parvenir. Le premier concerne la conceptualisation du domaine. Il s'agit de mesurer des connaissances qui résonnent avec l'expérience des enseignants. Pour cela, il faut croiser plusieurs champs de recherches : ceux spécifiquement centrés sur les connaissances pour enseigner les mathématiques avec ceux centrés sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre (Ball et al., 2001 ; Kieran, 2007).

Le second critère concerne la validation même du questionnaire : il s'agit de collecter des données permettant de tester la conceptualisation élaborée. Plusieurs études (Ball et al., 2008 ; Hill et al., 2008 ; Hill et al., 2004 ; Hill et al., 2009) mettent en lumière le caractère multidimensionnel des connaissances pour enseigner. Or même si, d'un point de vue conceptuel, il est possible de caractériser diverses dimensions de ces connaissances, ces dimensions sont complexes à valider empiriquement, en particulier lorsque les questionnaires envisagent les mathématiques en général et non un domaine mathématique spécifique comme c'est le cas dans l'étude présentée dans cet article. Dans ce contexte, il est essentiel de ne pas limiter les analyses au calcul d'un score global visant à estimer l'étendue des connaissances pour enseigner des enseignants mais au contraire d'envisager d'autres approches, notamment des analyses plus qualitatives, pour contribuer à mieux comprendre encore les spécificités de l'évaluation de ces connaissances pour enseigner (Hill, Ball & Schilling, 2008).

Cet article vise à rendre compte de la prise en compte de ces deux critères lors de l'élaboration du questionnaire. La première partie de l'article est centrée sur le cadre conceptuel qui est à la base de la construction du questionnaire. Ce cadre conceptuel vise à croiser les apports des recherches portant sur les connaissances pour enseigner avec celles portant sur les démarches d'apprentissage des élèves en algèbre élémentaire. Cette première partie vise ainsi à présenter des éléments relatifs au premier critère centré sur l'importance de la conceptualisation théorique du domaine à évaluer. La deuxième partie est consacrée à la présentation du questionnaire et des participants à l'étude. La troisième partie est quant à elle plus directement centrée sur le second critère relatif à la validation empirique du questionnaire. Elle présente les différentes étapes ayant permis d'élaborer le questionnaire ainsi que quelques résultats permettant d'assurer sa validation finale (procédure de contrôle de la qualité du codage des réponses apportées par les enseignants, calculs de corrélations bisériales de point, alpha de Cronbach et analyses factorielles).

2. Première partie : Cadre conceptuel

Dans le vaste champ de connaissances scientifiques établies dans le domaine de la didactique de l'algèbre élémentaire, il y a actuellement un manque important de liens entre les recherches portant sur les connaissances pour enseigner l'algèbre et celles portant sur son apprentissage par les élèves. Selon Kieran (2007), ce manque de lien s'explique en partie par le fait que les perspectives théoriques à la base de ces deux champs de recherches sont très contrastées : celles centrées sur les connaissances des enseignants sont essentiellement ancrées dans la théorie de Shulman (1987), alors que celles centrées sur l'apprentissage de l'algèbre se basent notamment sur le constructivisme, le socio-culturalisme, la médiation sémiotique, la connaissance située ou les situations didactiques.

Le cadre conceptuel qui est à la base de ce questionnaire vise à rendre compte d'une mise en relation entre ces deux courants de recherche. Il débute par la définition des axes structurant le questionnaire : ceux-ci font appel à des connaissances issues des deux domaines de recherche. Par la suite, l'architecture du questionnaire débouche sur la présentation de trois grands problèmes que pose l'enseignement actuel de l'algèbre élémentaire. Constituant une tentative d'intégration des deux courants de recherche, ces problèmes guident la conception des situations proprement dites et permettent également d'orienter les analyses transversales des réponses apportées par les enseignants aux questions posées en vue de mettre en lumière l'influence des situations de classe sur la mobilisation effective des connaissances pour enseigner.

2.1 Les trois axes structurant le questionnaire

Trois axes structurent le questionnaire. Le premier, issu de recherches portant sur l'apprentissage de l'algèbre, définit la variété des activités d'apprentissage en l'algèbre élémentaire. Les autres axes proviennent de recherches centrées sur les connaissances pour enseigner : le deuxième axe approfondit les dimensions essentielles de ces connaissances à évaluer et le troisième envisage d'autres apports permettant d'approcher l'influence des pratiques de classe sur la mobilisation des connaissances pour enseigner.

2.1.1 Axe 1 : Les activités d'apprentissage de l'algèbre

En fondant sa réflexion sur les travaux de Kaput (1995), Pimm (1995) et Bell (1996), Kieran (2007) a synthétisé les tâches d'apprentissages algébriques sous la forme d'un modèle, appelé modèle GTG, qui répertorie 3 types d'activités algébriques : les activités génératives (G), les activités transformationnelles (T) et les activités de niveau méta ou global (G). Les activités génératives amènent les élèves à élaborer des expressions algébriques ou des équations correspondant à des situations : il s'agit, par exemple, de produire une équation dont la résolution permettra de solutionner un problème donné ou d'exprimer une généralité découlant d'une suite arithmétique dont quelques termes sont présentés par des agencements de figures géométriques. La plupart des objets algébriques (sens de la lettre, des expressions algébriques et du signe d'égalité), émergent dans ces contextes.

Les activités transformationnelles correspondent aux situations d'apprentissage des techniques algébriques élémentaires permettant par exemple de réduire, développer, factoriser des expressions algébriques ou de résoudre une équation du premier degré à une inconnue. L'enjeu majeur de ces activités est d'amener les élèves à modifier la forme symbolique d'une expression ou d'une équation, tout en maintenant l'équivalence. Il serait erroné d'assimiler ces activités transformationnelles à un « simple » jeu de transformation d'écritures, en particulier lors des premiers apprentissages de ces techniques : celles-ci reposent en effet sur des propriétés fondamentales des opérations et de l'égalité. Toute la complexité de l'exploitation des activités transformationnelles est donc de permettre aux élèves non seulement de comprendre le bienfondé de ces règles mais aussi de les automatiser progressivement en vue de les utiliser à bon escient dans des situations variées.

Enfin, les activités de niveau méta ou global sont ces activités dans lesquelles l'algèbre est utilisée comme un outil dans le cadre d'activités de résolution de problèmes. Bien qu'elles puissent être résolues sans le recours à l'algèbre, ces situations constituent des contextes riches pour aider les débutants en algèbre à s'engager dans l'activité algébrique et à mobiliser ainsi les concepts et procédures dans des situations qui leur donnent sens.

2.1.2 Axe 2 : Les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire

L'enseignement de l'algèbre implique certaines connaissances mathématiques, qui sont partiellement différentes de celles utilisées dans les autres carrières impliquant des mathématiques (mathématiciens, ingénieurs ou scientifiques, par exemple). La conceptualisation de la connaissance de contenu et de la connaissance pédagogique de contenu élaborée par Shulman (1987) a été affinée, dans le domaine des mathématiques, par différents chercheurs à travers ce qu'ils appellent les connaissances mathématiques pour enseigner (Ball & al., 2001 ; Ball & al., 2008 ; Hill & al., 2008). Certaines relèvent des mathématiques proprement dites et correspondent donc aux connaissances de contenus et d'autres, bien que centrées sur des domaines mathématiques spécifiques, impliquent plus directement des aspects didactiques et pédagogiques : il s'agit alors des connaissances pédagogiques de contenu. La figure 1 présente les diverses facettes de ces connaissances pour enseigner.

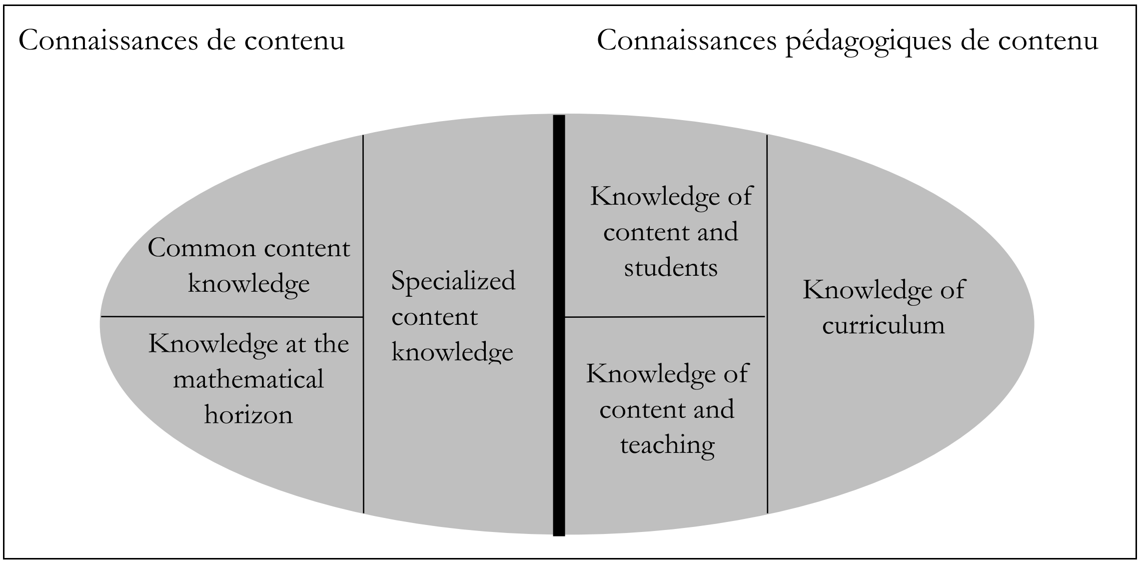


Figure 1 : Les différentes facettes des connaissances pour enseigner

Il existe 3 types de connaissances de contenu. Les premières, appelées « Common Content Knowledge », désignent les connaissances mathématiques générales qui permettent par exemple de s'assurer qu'une solution proposée par un élève ou qu'une définition est bien correcte sur le plan mathématique. Les deuxièmes, dénommées « Specialized Content Knowledge » correspondent à des connaissances mathématiques plus spécifiques à l'enseignement que les « Common Content Knowledge », comme, par exemple, la capacité à résoudre de plusieurs façons un même problème ou à illustrer une identité remarquable de différentes façons (à l'aide de supports visuels, de validations numériques, …). Enfin, les « Knowledge at the Mathematical Horizon » désignent la connaissance de la manière dont les concepts mathématiques s'articulent les uns par rapport aux autres dans l'ensemble des contenus mathématiques comme, par exemple, les connections entre l'algèbre et l'analyse.

Les connaissances pédagogiques de contenu présentent également trois facettes, selon qu'elles s'attachent plus spécifiquement à décrire les démarches et les erreurs fréquentes des élèves correspondant alors aux « Knowledge of Content and Students », les stratégies d'enseignement particulièrement porteuses, dénommées « knowledge of Content and Teaching » ou les aspects plus particuliers du curriculum ou « Knowledge of Curriculum ».

Dans le domaine spécifique des pratiques des enseignants en algèbre élémentaire, les « knowledge of Content and Students » et les « Knowledge of Content and Teaching », semblent déterminantes pour décrire les connaissances dont les enseignants en fonction ont particulièrement besoin (Even, 1990 cité par Kieran, 2007 ; Nathan et Koedinger, 2000). Ces deux types de connaissances sont donc plus particulièrement visés dans le questionnaire élaboré. Les premières, « knowledge of content and students », sont évaluées à travers des questions visant à amener les enseignants à analyser des démarches correctes ou incorrectes d'élèves débutant en algèbre. Les secondes, « knowledge of content and teaching » sont focalisées sur le choix d'activités à proposer aux élèves ainsi que sur des manières de réagir en classe face à des erreurs récurrentes d'élèves.

2.1.3 Axe 3 : Les catégories de pratiques d'enseignement

Le troisième axe est issu des travaux de MacCrory et al. (2012) qui mettent en évidence l'importance de prendre en compte la variété des situations dans lesquelles les enseignants sont plongés dans le flux de leur pratique de classe en algèbre. Celle-ci risque d'influencer la mobilisation de leurs connaissances pour enseigner.

Ces auteurs définissent ainsi trois grandes catégories de pratiques d'enseignement que les enseignants sont amenés à réaliser au quotidien : « décompresser », « faire des ponts » et « réduire la complexité ».

La pratique « décompresser » amène les enseignants à rendre apparents des éléments parfois sans importance pour les experts : parce qu'ils s'adressent à des élèves qui sont débutants dans le domaine, les enseignants sont amenés à revisiter des démarches qu'ils ont eux-mêmes automatisées en vue de faire apparaitre des aspects spécifiques qui sont essentiels lorsqu'on les découvre et qui deviennent sans importance lorsqu'on les automatise. Les travaux de Nathan et Koedinger (2000) ont pointé les difficultés des enseignants à réaliser cette décompression à travers le concept d'« expert blind spot », qui correspond à cette difficulté, pour des experts en mathématiques, de comprendre en profondeur les stratégies ou les difficultés réelles des élèves qui sont, eux, en train de découvrir la matière.

La pratique de « faire des ponts » permet aux enseignants de fournir aux élèves la possibilité de relier entre eux les thèmes, les objectifs, les représentations mathématiques, et de permettre ainsi de trouver de la cohérence dans les apprentissages. Dans le domaine particulier de l'algèbre élémentaire, cette démarche amène par exemple les enseignants à créer des liens avec le calcul sur les nombres, avec les procédures de calculs sur les fractions ou avec des supports visuels (figures géométriques par exemple) en vue de donner sens aux concepts et procédures algébriques.

Enfin, la troisième pratique, « réduire la complexité », concerne la volonté des enseignants de rendre les mathématiques accessibles aux élèves, tout en maintenant l'intégrité des concepts, en prenant soin de ne pas encourager des idées qui seraient correctes dans un contexte particulier, mais qui pourraient poser problème dans la compréhension des concepts mathématiques futurs. Cette réduction de la complexité amène les enseignants, peut-être en partie influencés par les curricula, à omettre ou au contraire à ajouter des détails, à modifier des niveaux de rigueur (Assude, Coppé & Pressiat, 2014) mais aussi à identifier les situations où la réduction de la complexité est trop importante : c'est par exemple le cas lorsque des détails importants ou des cas particuliers essentiels manquent. Un exemple de réduction de la complexité inadéquat en algèbre élémentaire serait de considérer que, pour mettre en équation un problème à résoudre, le choix de l'inconnue découle directement de l'analyse de la question posée dans l'énoncé. Si cette démarche peut être efficace dans un certain nombre de situations, elle s'avère inopérante face à d'autres énoncés. Ayant appris de telles démarches, les élèves risquent donc d'être mis en difficulté face à des énoncés nécessitant une analyse plus approfondie. Cette réduction de la complexité risque donc d'être préjudiciable aux apprentissages ultérieurs des élèves.

Ainsi, dans leur pratique quotidienne, les enseignants sont tous amenés à décompresser, faire des ponts ou réduire la complexité. Toutefois, dans certains cas, les choix qu'ils posent risquent de favoriser ou, au contraire, de freiner les apprentissages des élèves.

Par ailleurs, contrairement aux deux premiers axes, dont les catégories sont conceptuellement différentes, les catégories de pratiques d'enseignement sont étroitement liées : par exemple, lorsque l'enseignant pose un acte pour aider les élèves à comprendre son erreur, il pourra baser sa décision tant sur la volonté de réduire la complexité, que de décompresser la matière ou de faire des ponts avec d'autres domaines, voire même de mêler les 3 dimensions. Il semble donc très complexe d'élaborer des items spécifiquement centrés sur ce troisième axe.

En revanche, ce cadre de référence peut s'avérer très utile pour analyser la façon dont les enseignants justifient leurs décisions face aux situations de classe présentées dans le questionnaire. C'est pour cette raison que, bien que ce troisième axe soit présent en toile de fond dès la conception des situations, c'est principalement lors de l'analyse des résultats qu'il sera plus particulièrement utilisé.

2.2 L'architecture de l'épreuve et les trois débats que pose l'enseignement actuel de l'algèbre

La figure 2 propose une vision d'ensemble des trois axes structurant le questionnaire.

<table>
<tr><td>Activités d'apprentissages des élèves
Connaissances pour enseigner l'algèbre</td><td>Activités génératives</td><td>Activités transformationnelles</td><td>Activités de niveau méta ou global</td></tr>
<tr><td>Mise en relation du contenu et de son enseignement "knowledge of content and teaching"</td><td colspan="3" rowspan="2">Catégories de pratiques pour enseigner l'algèbre
Décompresser – rendre apparent des éléments sans importance pour les experts
Faire des ponts – établir des connections entre des thèmes, des idées et des concepts
Réduire la complexité– rendre les concepts accessibles aux élèves</td></tr>
<tr><td>Mise en relation du contenu et des élèves "knowledge of content and students"</td></tr>
</table>

Figure 2 : Les trois axes à la base du questionnaire

L'analyse conjointe de la littérature de recherche portant sur l'apprentissage de l'algèbre et sur son enseignement nous amène à poser trois grands problèmes relatifs aux catégories de pratiques d'enseignement (Mac Crory et al., 2012) et qui font intervenir des connaissances pour enseigner l'algèbre impliquées dans des activités d'apprentissages variées. Ces débats ciblent des thématiques étudiées dans la littérature de recherche portant sur l'apprentissage de l'algèbre, thématiques dans lesquelles les décisions prises par les enseignants sont particulièrement cruciales pour favoriser ou, au contraire, de freiner l'apprentissage effectif des élèves en algèbre. Ils nous ont à la fois aidées à l'élaboration du questionnaire et à l'orientation de l'analyse transversale des réponses apportées par les enseignants aux situations proposées.

En ce qui concerne la pratique de décompression, un débat particulièrement crucial est lié au fait qu'il existe un décalage entre l'aisance qu'a l'enseignant avec le langage algébrique et les difficultés que pose la maîtrise de celui-ci pour les élèves qui ont en revanche une plus grande familiarité avec l'arithmétique (Nathan & Koedinger, 2000 ; Bednarz & Janvier, 1996). Dans quelle mesure les enseignants ont-ils conscience des potentialités des démarches informelles des élèves pouvant s'avérer très performantes dans certaines activités de niveau méta ou global ? Prennent-ils en compte cet aspect pour organiser leur enseignement d'une technique propre à l'algèbre élémentaire, à savoir la méthode formelle de résolution d'équations ?

En ce qui concerne la pratique de faire des ponts, les contextes numériques constituent un levier riche pour aider les élèves à donner sens aux premiers apprentissages algébriques (Chevallard, 1985, 1989 ; Radford, 2006, 2008, 2014). Une forme algébrique de pensée pourrait même être développée avant les premiers apprentissages algébriques formels (Cai & Knuth, 2011). Radford (2008) a mis en évidence l'intérêt de travailler, même avec les jeunes élèves, des activités de généralisation permettant de développer tant les concepts de base en algèbre que les procédures de calculs : ces situations permettent de générer des démarches de résolution, pouvant être symbolisées par des expressions algébriques variées. Au début de l'enseignement secondaire, la comparaison des expressions algébriques ainsi produites permet d'intégrer les activités transformationnelles dans des contextes porteurs de sens.

Les enseignants sont-ils conscients de l'intérêt de ces mises en relation des domaines numériques et algébriques ? Sont-ils ouverts à la variété des démarches permettant de généraliser les suites étudiées, attitude permettant d'ancrer les activités transformationnelles dans des contextes porteurs de sens pour les élèves ?

Enfin, en ce qui concerne la pratique de réduire la complexité, un débat majeur se pose dans le domaine des activités transformationnelles. L'algèbre permet d'effectuer ces opérations sans devoir revenir sur la compréhension du pourquoi de chaque transformation : un mathématicien peut faire une confiance aveugle à des règles qu'il connait et ceci tant qu'aucun obstacle ne survient. En cas de difficultés, il a toutefois la possibilité d'abandonner ce fonctionnement en « pilote automatique » pour mettre en œuvre d'autres types de procédures. L'analyse fine des démarches des élèves (Sackur, Drouhard, Maurel & Pécal, 1997) montre que certains élèves tentent d'emblée d'automatiser les procédures, sans y donner sens. Ils deviennent ainsi des calculateurs aveugles qui se contentent de respecter des règles qu'ils croient correctes et qu'ils appliquent parfois dans des situations inappropriées.

Les enseignants sont-ils conscients des difficultés qu'ont les élèves à donner du sens aux concepts algébriques, en particulier au sens de la lettre et de l'égalité, dans ces activités centrées sur les procédures algébriques ? En cas d'erreur produite par les élèves, sur quelles bases s'appuient-ils pour rendre leurs explications accessibles, en évitant de corrompre le sens des concepts et procédures ? Se contentent-ils de rappeler la règle, renforçant ainsi certaines démarches d'élèves qui cherchent à tout prix à l'appliquer sans chercher à en comprendre les fondements ? Optent-ils plutôt pour des accompagnements soucieux de rappeler le bien-fondé mathématique de ces transformations ? Quelles réductions de la complexité s'autorisent-ils dans ces activités, pour rendre accessible aux élèves le sens des concepts, en particulier celui de la lettre et de l'égalité ?

3. Deuxième partie : Présentation du questionnaire et des participants

3.1 Les participants

Au total, 88 enseignants ont participé à l'enquête. Ils travaillent dans 29 des 39 établissements luxembourgeois. Ces 29 établissements sont de niveaux socio-économiques variés et sont installés dans différentes régions du Luxembourg. Tous les enseignants interrogés sont notamment responsables de la formation mathématique d'élèves de grade 7 à 9 (12-15 ans). La répartition homme-femme est assez homogène (47% de femmes et 53% d'hommes) et les participants ont une expérience de travail allant de 0 à 21 ans ou plus, comme le montrent les données de la figure 3.

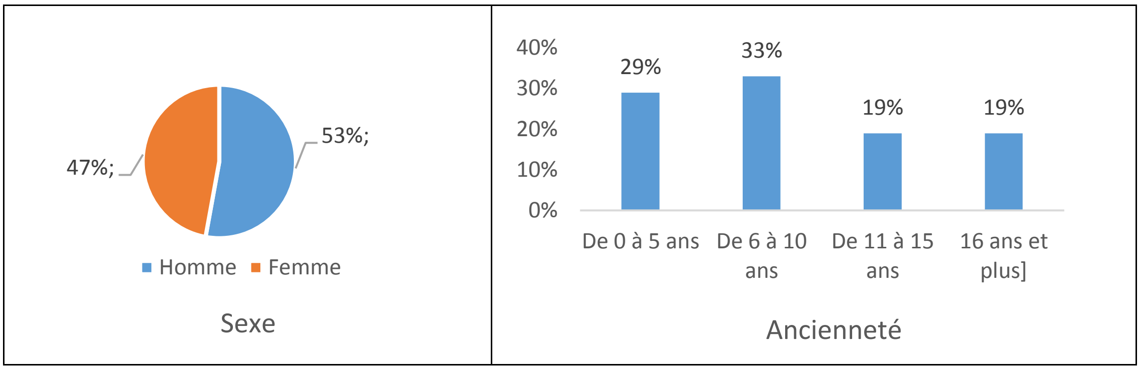


Figure 3 : Caractéristiques des participants à l'enquête

3.2 Le questionnaire

S'insérant dans le cadre d'une recherche orientée sur la mise en place d'un programme de développement professionnel, le questionnaire a été élaboré dans le but de contribuer à piloter un tel programme, en vue de cibler des thématiques essentielles à approfondir auprès des enseignants en formation. Il a donc été soumis aux enseignants six mois avant la mise en place du programme.

Le questionnaire est composé de 10 situations à analyser, organisées en 21 items. Le choix d'envisager le questionnement sur la forme de situations se justifie par l'importance de cibler des éléments qui résonnent avec l'expérience réelle des enseignants. Les deux situations présentées dans la figure 4 illustrent ce propos.

Les élèves d'une classe ont travaillé sur le calcul algébrique. L'enseignante voudrait faire un travail plus ciblé avec des élèves qui éprouvent le même type de difficultés. Elle analyse les trois productions suivantes :

I	II	III
$7r + 2t - 3t - 2r = 9r - t$	$a . (5b + 2 - 7 - 3b)$ $= a . (8b - 5)$ $= 8ab - 5a$	$r. (-t^2 + 2p - 5p - t^2)$ $= r. (-2t^2 - 3p)$ $= 4rt^2 - 3rp$

Qui a fait le même type d'erreurs ?

☐ I et II

☐ I et III

☐ II et III

☐ I, II et III

Expliquez votre réponse : ....

....

Deux enseignants, Steve et Dirk, comparent la difficulté des deux problèmes suivants pour des élèves de 12 à 14 ans.

Problème 1

Un père partage une somme de 1800 euros entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 euros de moins à Béatrice qu'à Céline. Béatrice reçoit 600 euros. Combien les autres enfants ont-ils reçu ?

Problème 2

Un père partage une somme de 600 euros entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 150 euros de plus à Béatrice qu'à Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

L'avis de Steve :	L'avis de Dirk :
Le problème 1 me semble bien plus compliqué à résoudre que le deuxième pour 3 raisons : 1. il y a plus de phrases à lire dans le problème 1 que dans le problème 2 ; 2. le total est réparti entre 3 enfants dans le problème 1, il n'y en a que 2 dans le problème 2 ; 3. même si, dans le problème 1, le montant de Béatrice est connu, il y a quand même deux inconnues (la part d'Aurélie et de Céline) à déterminer.	Pour moi, c'est le problème 2 qui est le plus compliqué, pour deux raisons : 4. dans le problème 1, le fait que la part de Béatrice soit connue permet aux élèves de faire des calculs qui n'impliquent pas les lettres : il suffit de comparer les montants de Céline et Aurélie à celui de Béatrice pour trouver directement les 3 parts ; 5. c'est vrai que dans le problème 2, la part de l'une se déduit directement de la part de l'autre. Mais l'apparente simplicité de l'énoncé va amener beaucoup d'élèves à diviser 600 en 2, et à ajouter 150 euros au quotient obtenu, sans vérifier que le total n'est pas respecté.

Selon vous, qui a raison ?

Parmi les arguments évoqués par les deux enseignants, lequel (ou lesquels) vous paraissent les plus convaincants ?

Figure 4 : Deux questions proposées dans le questionnaire et destinées à évaluer les connaissances des enseignants dans des situations proches de leurs pratiques de classe

La première question, centrée sur l'analyse des difficultés d'élèves dans les activités transformationnelles, a pour but de voir dans quelle mesure l'enseignant cible son analyse sur le type de procédure à mobiliser (dans ce cas, les exemples II et III sont proches, puisqu'il s'agit d'appliquer une distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction) ou sur les véritables difficultés des élèves (dans ce cas, il s'agit de réunir les élèves ayant proposé les productions I et II qui correspondent à des erreurs pointées dans la littérature de recherche comme fréquentes dans ce type de situations (Vlassis, 2010). Cette question est présentée dans un contexte où l'enseignant est amené à réaliser des groupes en fonction des besoins plus spécifiques d'élèves. La deuxième question a pour but de voir si les enseignants connaissent les critères pour déterminer ce qui fait la difficulté d'un problème arithmétique pour un élève débutant en algèbre- à savoir l'argument 4, proposé par Dirk (Bednarz & Janvier, 1996). A nouveau ce questionnement est proposé dans une situation susceptible de résonner avec l'expérience réelle des enseignants, puisqu'il propose des arguments fictifs échangés entre deux enseignants en regard de la thématique ciblée.

Le questionnaire, de type « papier-crayon », est prévu pour une passation individuelle d'une durée approximative de 45 minutes.

Sur les dix situations à analyser, cinq se présentent sous la forme de questions à choix multiples où l'enseignant est amené à faire un choix parmi une série de propositions. Malgré l'intérêt de ce type de questionnement en termes de facilité de récolte et d'analyse de données, Hill et al. (2008) estiment qu'il est dangereux de ne privilégier que ce type de questionnement, notamment parce que les distracteurs plausibles et attractifs sont difficiles à élaborer : soit ils sont tout à fait faux et ne sont choisis par personne, soit ils sont partiellement corrects et risquent d'altérer la fiabilité du test. Les 5 autres situations se présentent donc dans un format ouvert, permettant de recueillir les commentaires sur les choix posés par des enseignants en regard de thématiques ciblées. La proposition de situations rédigées sous la forme de formats variés constitue une tentative de rencontrer les avantages des deux types d'approches.

La figure 5 reprend l'organisation des items en référence au cadre conceptuel.

Activités d'apprentissages des élèves / Connaissances pour enseigner l'algèbre	Activités génératives	Activités transformationnelles	Activités globales
knowledge of content and teaching	3 items	2 items	2 items
knowledge of content and students	4 items	7 items	3 items

Figure 5 : L'organisation des situations

L'analyse des réponses fournies par les enseignants aux questions proposées est pensée pour être envisagée selon une double perspective. Un premier regard, d'ordre quantitatif, permettra de mesurer le degré de congruence entre les réponses apportées par les enseignants aux différentes questions posées en comparant ces réponses à quelques constats majeurs relevés dans la littérature de recherche. Ce premier regard sera synthétisé sous la forme d'un score global à l'épreuve accompagné, si la validité empirique le permet, de sous-scores par dimension évaluée. Un second regard, de nature qualitative, s'appuiera principalement sur les réponses apportées aux questions ouvertes nécessitant une justification : il s'agira de cerner les éléments sur lesquels les enseignants fondent leurs décisions, qu'elles soient ou non cohérentes avec les constats de recherche. Ce second regard visera à alimenter les trois grands débats liés aux catégories de pratiques exposés dans la première partie de l'article.

4. Troisième partie : Les différentes étapes ayant permis de développer le questionnaire

Cette section retrace les étapes qui ont permis de mettre au point le questionnaire en vue d'analyser sa pertinence mais aussi d'assurer la validité empirique du volet quantitatif de l'enquête. Le questionnaire a été développé en quatre phases distinctes, incluant le développement d'items et du guide de codage, puis la réalisation de deux essais pilotes et enfin, la validation finale.

4.1 Le développement des items et du guide de codage

Les situations concrètes proposées dans le questionnaire ont émergé suite à l'analyse de thématiques étudiées par des recherches centrées, d'une part, sur les difficultés des élèves en algèbre élémentaire (Duval 2002 ; Kieran, 1992 ; Nathan & Koendinger, 2000 ; Sackur et al, 1997 ; Radford, 2003, 2008, 2014 ; Vlassis et Demonty, 2002) et, d'autre part, sur les caractéristiques des environnements efficaces pour enseigner l'algèbre (Chevalard, 1998 ; Duval, 2002 ; Kieran, 2007 ; Radford, 2002, 2008, 2014 ; Sackur et al., 1997).

Parallèlement à la conception des situations, le guide de codage a été élaboré. Pour chacune des questions posées dans les situations, la (ou les réponses) cohérente(s) avec la littérature de recherche a (ont) été dégagée(s). Il a donc été décidé d'attribuer un code 1 si l'enseignant propose une telle réponse. Dans les autres cas, un code 0 (en cas de réponse non cohérente avec la littérature de recherche) ou 9 (en cas d'omission) est prévu. Dans plusieurs situations, le questionnement a été pensé de manière à recueillir les manières dont les enseignants justifient leurs choix, en vue d'analyser ces informations en référence aux trois grands types de pratiques d'enseignement (« décompresser », « faire des ponts » et « réduire la complexité ») qu'ils sont amenés à réaliser dans leur enseignement de l'algèbre. Toutefois, aucun codage n'a été anticipé dans ce cas : l'analyse du contenu des justifications sera réalisée a posteriori, en fonction des réponses réelles proposées par les enseignants.

Pour illustrer le processus conjoint de développement d'items, d'élaboration du guide de codage et d'anticipation « théorique » de l'analyse de contenu, analysons plus spécifiquement la question présentée dans la figure 6.

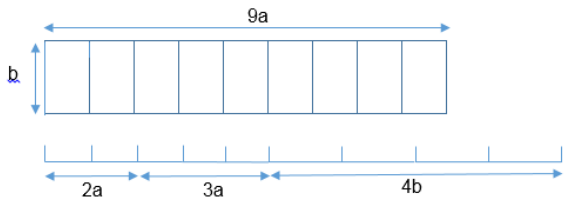
Face à une somme algébrique comme 3a + 2a + 4b, les élèves ont souvent tendance à additionner les termes non semblables pour obtenir la réponse 9ab. Voici plusieurs façons de réagir à ce type d'erreur :

a) Leur montrer que pour réduire une somme algébrique, il faut mettre en évidence un facteur commun, et qu'il n'y a pas de facteur commun entre 5a et 4b (on ne peut donc pas réduire cette expression algébrique)

$$3a + 2a + 4b = a\,(3+2) + 4b = 5a + 4b.$$

b) Leur expliquer qu'en mathématiques, on n'additionne pas des pommes et des poires. On peut donc additionner les termes en a, les termes en b, mais pas des termes en a avec des termes en b : la réponse 9ab n'a donc pas de sens.

c) Leur montrer que l'expression 9ab pourrait désigner l'aire d'un rectangle de longueur 9a et de largeur b, alors que l'expression 3a +2a +4b ne pourrait pas désigner la même aire :



d) Leur expliquer que lorsqu'on a une somme à réduire, on ne peut que réduire les termes qui ont la même partie littérale. Or, les termes 5a et 4b n'ont pas la même partie littérale. On ne peut donc pas les additionner.

e) Faire remplacer a et b pas des nombres et constater que, la plupart du temps, la réponse est différente pour « 3a + 2a + 4b » et « 9ab ». Elle n'est la même que si a et b sont tous les deux égaux à 1.

f) Faire expliquer le sens des expressions « 3a + 2a + 4b » et « 9ab », mettre en évidence le fait qu'elles ont une valeur qui dépend de a et b, valeur qui n'est pas toujours la même pour « 3a + 2a + 4b » ou pour « 9 ab ».

Parmi ces démarches, laquelle vous paraît la plus efficace : ________

Expliquez en quelques mots votre point de vue.

Figure 6 : Un exemple de question de l'enquête

Les différentes réactions proposées dans cette question ont été étudiées dans plusieurs recherches portant sur les techniques algébriques (Kieran, 1992 ; Sackur et al., 1997 ; Tirosh, Even & Robinson, 1998). Certaines s'avèrent particulièrement efficaces dans la mesure où elles permettent aux élèves de comprendre leur erreur en référence au sens des expressions algébriques et de l'égalité (Propositions c, e et f). Elles peuvent également témoigner d'une volonté de faire des ponts entre des thématiques (étude des nombres pour la proposition e et f et notion d'aire et périmètre pour la proposition c). Le guide de codage relatif à cette question propose d'attribuer un code 1 lorsque l'enseignant choisit une de ces trois propositions.

Bien qu'elle propose une concrétisation des règles algébriques, la démarche décrite dans la proposition b est présentée, dans la littérature de recherche, comme néfaste à une compréhension des concepts algébriques à l'œuvre dans ces transformations d'écriture. Choisir cette proposition en évoquant la volonté de concrétiser les règles algébriques pourrait toutefois être interprété comme une volonté de réduire la complexité de l'algèbre en tentant d'associer les lettres à des objets, attitude particulièrement préjudiciable aux apprentissages futurs des élèves.

Les propositions a et d, sont valides sur le plan mathématique, mais ne permettent pas réellement à l'élève de comprendre son erreur puisqu'elles se cantonnent soit à détailler la règle (proposition d), soit à la justifier en référence aux propriétés des opérations (proposition a). Le choix de ces deux propositions (a et d) pourrait mettre en évidence une difficulté des enseignants à décompresser la matière, considérant que l'important dans cette situation est d'amener les élèves à automatiser la règle, sans se soucier de la perte de sens que ce type d'approche risque de provoquer pour des élèves débutant dans le domaine.

Telle que décrite ci-dessus, l'analyse des réponses apportées par les enseignants à cette situation, c'est-à-dire le choix posé ainsi que la justification de celui-ci, sera envisagée selon une double perspective : d'une part, voir si le choix est en cohérence avec les constats issus de la littérature de recherche (c'est le cas s'ils choisissent les propositions c, e ou f) et, d'autre part, mettre en évidence les justifications du choix en vue de voir d'éventuelles influences des catégories de pratiques sur les choix posés. Ce second aspect sera envisagé a posteriori, en fonction de l'analyse des justifications réelles proposées par les enseignants concernant leur choix.

4.2 La réalisation de deux essais pilotes

Initialement, 30 items répartis en 15 situations ont été élaborés. Le premier essai pilote a consisté à réaliser des entretiens individuels avec 5 enseignants, sur la base de la première version du questionnaire. Il a essentiellement eu pour but de vérifier la lisibilité du questionnaire ainsi que le caractère réaliste des situations : résonnaient-elles réellement avec l'expérience de ces enseignants ? Suite à ce premier essai pilote, les consignes de 3 questions ont été revues et aucune situation n'a été éliminée.

Le deuxième essai pilote s'est ensuite déroulé auprès de 40 enseignants provenant de 10 écoles, qui ont accepté de répondre par écrit au questionnaire. Il a été prolongé par des entretiens a posteriori avec 8 enseignants provenant de 2 écoles différentes, les amenant à s'exprimer sur le caractère réaliste des questions proposées et à expliciter leurs réponses. La méthode du « retrospective think aloud » (Alavi, 2005 ; Sudman, Bradburn & Schwartz, 1996), a permis de mieux cerner les processus cognitifs mis en place par les enseignants pour répondre aux questions, notamment pour choisir les distracteurs dans les questions à choix multiples. Ce deuxième essai pilote a également permis d'estimer la durée de passation du questionnaire et de prévoir une réduction du nombre de situations à envisager, de manière à éviter un temps de passation excessif. Les questionnaires récoltés lors du deuxième essai pilote ont été codés par un chercheur spécialisé en didactique des mathématiques, en fonction du caractère cohérent (ou non) des choix posés par les enseignants aux différentes situations en regard de la littérature de recherche. Un indice de cohérence interne (coefficient alpha de Cronbach égal à 0.82) a été calculé et des indices de discrimination (corrélation bisériale de point) de chaque item ont été calculés. Une analyse du contenu des justifications proposées par les enseignants a également été menée, de manière à s'assurer de la possibilité de porter le second regard sur les réponses proposées par les enseignants, dont le but est d'alimenter les trois grands débats relatifs aux catégories pratiques découlant de l'analyse de la littérature de recherche présentés précédemment (voir première partie).

La sélection des items pour l'enquête définitive a été réalisée en tenant compte non seulement des indices statistiques (l'ensemble des items conservés avait une corrélation bisériale de point supérieure à 0.20), mais aussi des données plus qualitatives recueillies suite aux entretiens avec les enseignants. En définitive, 21 items organisés en 10 situations ont été conservés pour la passation définitive du questionnaire.

4.2.1 La validation finale

Au total, 88 enseignants ont complété la version définitive du questionnaire. Des procédures particulières ont été mises en place pour garantir la qualité du codage des réponses proposées.

En ce qui concerne le premier angle d'analyse (lié au degré de cohérence entre les choix des enseignants et la littérature de recherche), les réponses apportées aux questions ouvertes ont été soumises à un double codage à l'aveugle réalisé par deux chercheurs spécialisés en didactique des mathématiques : un degré d'accord a ensuite pu être calculé sur la base de la proportion de codages identiques. Deux items ont dû être révisés car la proportion de codages identiques n'atteignait pas 90%. Le guide de codage a donc été revu, pour réduire la proportion de désaccords entre codeurs. Suite à ces aménagements, le taux d'accord pour ces deux items a également été porté à 90% et les derniers cas problématiques ont alors été tranchés.

Des indices de discrimination (corrélations bisériales de points comprises entre 0.22 et 0.56 avec une moyenne de 0.38), ainsi qu'un indice de cohérence interne (coefficient alpha de Cronbach égal à 0.73) ont été calculés. Des indices de cohérence interne ont également été calculés pour les deux dimensions du questionnaire mutuellement exclusives identifiées a priori (types de connaissances pour enseigner et type d'activités d'apprentissage de l'algèbre) mais, dans les deux cas, les résultats n'ont pas permis de valider empiriquement ces deux dimensions (coefficients alpha inférieurs à 0.70). Des analyses factorielles ont également été menées, mais aucune n'a permis d'isoler des dimensions pertinentes en regard du cadre conceptuel à la base du questionnaire. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus pour d'autres questionnaires visant à évaluer les connaissances mathématiques pour enseigner (Ball et al., 2008 ; Hill et al., 2004 ; Hill et al., 2008 ; Hill et al., 2009).

En ce qui concerne le second angle d'analyse (lié à l'analyse qualitative des réponses proposées par les enseignants pour justifier leurs choix), les toutes premières analyses confirment que les réponses apportées par les enseignants aux situations permettent d'alimenter les débats posés par l'analyse conjointe de recherches portant sur l'apprentissage de l'algèbre et sur son enseignement, en mettant en évidence des positions parfois paradoxales d'un nombre non négligeable d'enseignants. Par exemple, face au débat lié à la réduction de la complexité, bon nombre sont conscients des difficultés des élèves à donner un sens correct à la lettre impliquée dans les transformations algébriques. Toutefois, face à une erreur, ces mêmes enseignants ont tendance à privilégier la réaction qui corrompt le sens de la lettre (en l'associant à un objet), risquant alors d'amplifier une difficulté souvent rencontrée par les élèves débutants en algèbre et reconnue comme telle par les enseignants. Ces premiers résultats nous confortent dans l'idée de la nécessité d'évaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre dans des situations variées car celles-ci semblent avoir une influence non négligeable sur la mobilisation des connaissances par les enseignants. Ce type d'information semble également d'une aide précieuse pour piloter le développement professionnel des enseignants en algèbre.

5. Conclusion et discussions

Si les recherches portant sur l'évaluation des connaissances pour enseigner les mathématiques ont beaucoup évolué depuis la fin des années 80, on constate actuellement un manque de travaux analysant finement ces connaissances dans un domaine précis (Hill et al., 2009). Dans le domaine de l'algèbre élémentaire on dispose actuellement d'un large corpus de savoirs scientifiques sur les apprenants et sur les caractéristiques des environnements d'apprentissages porteurs (Kieran, 1992, 2007). Toutefois, on déplore un manque important de connections entre ces savoirs et ceux liés aux connaissances pour enseigner l'algèbre (Kieran, 2007).

Dans cet article, nous avons présenté un cadre conceptuel visant à mettre en relation ces deux champs de recherche, indispensable pour pouvoir interpréter les réponses apportées par les enseignants aux questions de l'enquête. Cette première réflexion a été prolongée par une série d'analyses de validité de l'outil produit. Celles-ci montrent à la fois les possibilités de l'outil, mais aussi ses restrictions d'utilisation pour des analyses quantitatives : il apparait en effet que les sous-dimensions conceptuellement pertinentes ne se dégagent pas d'un point de vue empirique. L'approfondissement du diagnostic via le calcul de sous-scores n'est donc pas possible, rendant actuellement complexe son utilisation à plus grande échelle.

L'enquête présente une série de limites : les analyses s'appuieront sur des déclarations écrites d'enseignants et non, comme c'est le cas dans d'autres études (Mc Crory et al., 2012), sur des observations directes dans les classes ; l'échantillon est réduit puisqu'il ne concerne que 88 répondants et enfin, le nombre de questions et de dimensions explorées a dû être limité, la durée de passation ne pouvant excéder 45 minutes.

Malgré ces limites, l'élaboration et la validation de notre questionnaire permet de mettre en lumière deux constats majeurs.

Le premier renvoie au processus même de l'élaboration de l'outil. Les diverses analyses réalisées pour tester la pertinence et la validité du questionnaire confortent l'idée selon laquelle la mesure de telles connaissances est loin d'être simple (Hill et al., 2008). S'il parait incontournable de proposer un questionnement qui s'appuie sur les problématiques rencontrées par les enseignants dans l'exercice de leur profession (Ball & Bass, 2002 ; Hill et al., 2008 ; Hill et al., 2009), nous pensons que le développement même des situations gagne à cibler des thématiques relevées dans la littérature de recherche comme particulièrement favorables ou au contraire préjudiciables à l'apprentissage effectif des élèves. Et, dans le domaine particulier de l'algèbre élémentaire, les ressources théoriques ne manquent pas (Kieran, 1992, 2007). Malgré ce contexte favorable, élaborer de telles situations authentiques n'est pas aisé : une fois les thématiques ciblées, le travail d'élaboration de situations a nécessité des entretiens et des discussions avec des enseignants ainsi que des essais préliminaires rigoureux. Le codage des réponses apportées par les enseignants aux questions ouvertes a nécessité un double codage, montrant à quel point il est parfois complexe d'interpréter la pratique enseignante déclarée en référence aux résultats de recherche. Ce premier constat ne fait que renforcer l'importance d'utiliser des approches multiples pour évaluer les connaissances enseignantes (Hill et al., 2009). Dans notre questionnaire, nous nous sommes montrées soucieuses de varier les formats de questionnement alternant questions fermées et questions ouvertes demandant aux enseignants de justifier leur choix posés sur des situations authentiques de classe.

Le second constat se réfère à la validité de l'outil. Même si conceptuellement, deux dimensions et cinq sous-dimensions mutuellement exclusives sont ciblées dans le questionnaire, la validation psychométrique de ces dimensions n'a pas pu être établie, et ce, malgré le fait que l'outil se centrait sur le sujet particulier de l'algèbre élémentaire et non, comme dans d'autres études, sur les mathématiques, en général (Ball et al., 2008 ; Hill et al., 2004 ; Hill et al., 2008 ; Hill et al., 2009). Le caractère multidimensionnel des connaissances pour enseigner ainsi que le faible échantillon de sujets et d'items impliqués dans notre étude sont sans doute en partie à l'origine de ce phénomène (Hill et al., 2008). Toutefois, grâce à l'élaboration de situations authentiques et à la variété du questionnement proposé, les premières analyses transversales permettent de considérer de nouvelles pistes : il semble en effet que, dans certaines situations, les enseignants mobilisent spontanément des connaissances particulièrement porteuses pour favoriser la compréhension par les élèves de concepts algébriques et, dans d'autres situations où ces mêmes connaissances pourraient être mobilisées, ils ne les sollicitent pas. Ce phénomène, s'il se confirme dans l'analyse approfondie des résultats, ne peut que contribuer à altérer la validité empirique de l'outil. Et pourtant, il s'agit là d'un résultat essentiel pour guider le développement professionnel des enseignants : discuter de ces paradoxes, envisager les raisons qui amènent les enseignants à opérer ces choix et chercher, avec eux, des démarches d'enseignement alternatives pour éviter ces paradoxes, permettraient d'affiner encore les connexions entre les résultats de recherches centrées sur l'algèbre élémentaire et les contraintes réelles des enseignants lorsqu'ils sont en classe avec les élèves.

En définitive, cette étude suggère d'approfondir encore la réflexion concernant les liens entre pratiques enseignantes et résultats de recherche, à travers des prises de données variées, telles que des entretiens directs avec les enseignants ou des observations dans les classes, en vue de continuer à explorer ce champs complexe de recherche que constitue les connaissances pour enseigner efficacement un sujet particulier comme l'algèbre élémentaire.

6. Références

Alavi, S. M. (2005). On the adequacy of verbal protocols in examining an underlying construct of a test. *Studies in Educational Evaluation, 31*(1), 1–26.

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In L. Coulange, J.-L. Dorier, J.-P. Drouhard & A. Robert (Ed.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives* : Numéro spécial hors-série de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (pp. 41-62). Grenoble : la Pensée Sauvage.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching, 4*, 433-456.

Ball, D. L. & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (dir.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton: CMESG.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp.115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 167-185). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A dialogue for multiple perspective*. New York: Springer.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : L'évolution de la transposition didactique*, Petit x, 5*,51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : la notion de modélisation, *Petit x, 19*, 43-75.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'Algèbre*, IREM de Nice, 481-486.

Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. & Ball, D. (2009). The curious—and crucial—case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform ? In D.T. Owens, M.K. Reed & G.M. Millsaps (Eds), *Proceeding of the Seventh Annual Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 71-94.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra in the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lister (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Nathan, M. J. & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209-237.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

Radford, L. (2003). Narratives, expressions algébriques et calcul formel : de la constitution à la transformation du sens. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8,* 191-208.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12 (Vol. 1) 2-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257-277.

Sackur C., Drouhard J.P., Maurel M. et al. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées et qu'en faire ? *Repères - IREM, 28*, 37-68.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), 1-23.

Sudman, S., Bradburn, N. M. & Schwarz, N. (1996). *Thinking about answers: The application of cognitive processes to survey methodology*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Tirosh, D., Even, R. & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics, 35*(1), 51-64.

Vlassis, J. (2010). *Sens et Symboles en mathématiques : Etude de l'utilisation du signe "moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Bern : Peter Lang.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire : guide méthodologique et CD-ROM.* Bruxelles : De Boeck.